RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. Battelli.

Occupandomi della resistenza elettrica dei solenoidi per correnti alternate ho mostrato (1), in una mia antecedente Nota, che i risultati teorici, trovati su tale argomento dal Wien, praticamente valgono soltanto per correnti di bassa frequenza, per le quali del resto il valore della resistenza differisce assai poco da quello che spetta alle correnti continue.

In quella Nota io ho anche discusso i risultati teorici a cui era pervenuto posteriormente il Sommerfeld occupandosi dello stesso problema; essi si riferiscono a solenoidi ideali, che, per esempio, potrebbero costruirsi avvolgendo ad elica un nastro metallico sopra un cilindro, in modo che sia ridotto a zero lo spazio isolante compreso fra due spire consecutive. In pratica invece i solenoidi sono sempre costruiti con filo a sezione circolare, anzichè con nastro a sezione rettangolare; e ciò fa sì, che ai medesimi non possono affatto applicarsi i risultati teorici del Sommerfeld, nè per basse, nè per alte frequenze.

Veramente il Sommerfeld, confrontando la resistenza R dei suoi solenoidi ideali, supposti costruiti con nastro a sezione quadrata, con le corrispondenti resistenze R′, che l'esperienza assegna a quei solenoidi quando la loro sezione, a parità di area, venga trasformata in un cerchio, era venuto alla conclusione che frà R ed R′ c'è bensì una notevolissima discordanza — pari circa al 50 % di R′ — ma che il rapporto $\frac{R'}{R}$ è una costante γ, che ha lo stesso valore

(1) Rendiconti R. Acc. Lincei, seduta del 17 dicembre 1905, e del 4 febbraio 1906.

($\gamma = 0{,}6$) sia per le alte, che per le basse frequenze. In realtà però la costanza del rapporto $\frac{R'}{R}$, nei casi esaminati dal Sommerfeld, deve probabilmente attribuirsi più ad una casuale coincidenza, che ad una vera legge fisica. È infatti veramente improbabile che il rapporto $\frac{R'}{R}$, il quale per correnti continue ha il valore 1, debba poi acquistare, in maniera quasi discontinua, il valore 0,6 appena la corrente diviene alternata e debba conservare costantemente quel valore sia per le basse, che per le alte frequenze.

Parrebbe perfino, secondo le conclusioni del Sommerfeld, che per le alte frequenze la resistenza di un filo avvolto ad elica debba essere indipendente dal *passo* dell'elica, il che è addirittura contradetto dalle esperienze.

Se poi si volessero accettare i risultati del Sommerfeld, generalizzandoli con l'ammettere che al fattore γ debba attribuirsi un valore compreso fra 1 ed $^1/_2$ e variabile da caso a caso, è chiaro che essi lascerebbero nelle formule una indeterminazione, per effetto della quale il valore calcolato per la resistenza può subire oscillazioni che arrivano al 50 % del valore reale; senza dubbio, nella maggior parte dei casi, si otterrebbe un'approssimazione maggiore, assumendo senz'altro per valore della resistenza quello che, per correnti di quella data frequenza, si calcola colle formule che si riferiscono ai fili rettilinei. Infatti, in pratica il rapporto fra la resistenza di un filo avvolto a solenoide e la resistenza dello stesso filo disteso in linea retta si comincia sensibilmente a scostare dall'unità, solo per frequenze assai elevate; acciocchè tale rapporto possa acquistare il valore 2, si richiedono, nei casi sperimentali da me osservati [1], frequenze superiori a 100 mila alternanze per secondo.

Io ho tentato per altra via la risoluzione teorica di questo importante problema, occupandomi unicamente del caso di frequenze molto elevate, perchè per le correnti di bassa frequenza servono assai bene i risultati del Wien. Io ho fondato la mia trattazione sopra un'osservazione di carattere assai generale, la quale estende notevolmente la portata teorica delle leggi ben note, che, per i conduttori rettilinei, esprimono il localizzarsi delle correnti di alta frequenza alla superficie.

È noto che in un conduttore di forma qualsiasi le tre componenti u, v, w della densità della corrente, se questa è variabile col tempo t, soddisfanno alle equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \Delta_2 v = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma} \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \Delta_2 w = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma} \dfrac{\partial w}{\partial t}, \end{cases}$$

[1] Mem. R. Acc. delle Scienze di Torino, 51, pag. 314.

dove

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

e le costanti μ e σ rappresentano rispettivamente la permeabilità magnetica e la resistenza specifica del conduttore.

Queste equazioni sono state integrate in due casi particolari: quello in cui il conduttore sia costituito da una piastra metallica e quello in cui il conduttore sia costituito da un cilindro pieno o cavo; nell'un caso e nell'altro, se la frequenza delle correnti è sufficientemente alta, si trova che (1), indicando con

$$w_0 = A \cos \omega t$$

la densità della corrente alla superficie del conduttore e rappresentando

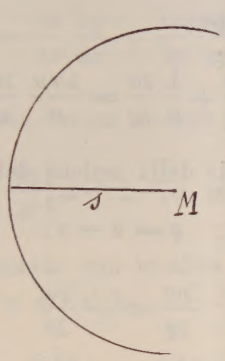

Fig 1.

quindi con ω il numero di alternanze che fa la corrente in 2π secondi, in un punto M (fig. 1) interno al conduttore e posto alla distanza s dalla superficie, la densità della corrente è

$$w = Ae^{-\alpha s} \cos(\omega t - \alpha s), \tag{2}$$

dove α è una costante e precisamente

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\sigma}}. \tag{3}$$

Come si vede l'ampiezza

$$Ae^{-\alpha s}$$

della densità della corrente decresce, con legge esponenziale, col crescere di s

(1) J. J. Thomson, *Recent Reseaches in Electricity and Magnetism*, § 257 e segg. Nel servirmi delle formole, riferite dal Thomson, io ammetto che sia $m = 0$, cioè che le dimensioni del conduttore siano trascurabili di fronte alla lunghezza d'onda delle correnti.

e ciò fa sì che, per frequenze molto alte, per le quali α ha un valore molto grande, la corrente può quasi del tutto considerarsi localizzata in un sottilissimo strato superficiale del conduttore; oltre a ciò la fase della corrente diminuisce col crescere di s, nella stessa misura con cui va crescendo, in valore assoluto, l'esponente che comparisce nella precedente espressione dell'ampiezza

Si osservi che, per conduttori cilindrici a sezione circolare, la distribuzione della corrente è simmetrica intorno all'asse del filo; perciò, assumendo questo come asse delle z, si ha $u = v = o$ e w diverso da zero e dipendente solo dalla distanza ϱ del punto generico dell'asse medesimo. Si ha quindi

$$\Delta_2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho},$$

e sostituendo nelle (1) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ora, indicando con a il raggio della sezione del filo, si ha

$$\varrho = a - s,$$

quindi

$$\frac{\partial w}{\partial \varrho} = -\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

e sostituendo nella precedente equazione,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{4}$$

D'altra parte è facile verificare che l'espressione (2) soddisfa alla equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{5}$$

Si è dunque condotti ad ammettere, che per frequenze molto elevate, nell'equazione (4) il termine

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}$$

è trascurabile di fronte ai rimanenti, ossia che il conduttore si comporta come se il raggio di curvatura ϱ della sezione del filo fosse infinitamente grande.

Considero adesso il caso generale di un conduttore di forma qualsiasi. Io suppongo che siano noti i coseni di direzione α, β, γ della corrente; allora, indicando con φ la grandezza della densità della corrente nel punto di coordinate x, y, z, si ha:

$$u = \varphi\alpha \qquad v = \varphi\beta \qquad w = \varphi\gamma ,$$

ed una qualunque delle equazioni (1) può servire alla determinazione effettiva di φ. Per maggior simmetria di trattazione è più vantaggioso servirsi di una loro particolare combinazione lineare. Si osservi a tal uopo che

$$\Delta_2 u = \alpha \Delta_2 \varphi + 2 F(\alpha , \varphi) + \varphi \Delta_2 \alpha ,$$

dove Δ_2 ha il significato anzidetto e F è il simbolo del parametro differenziale misto, cioè

$$F(\alpha , \varphi) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

La prima delle (1) si può dunque mettere sotto la forma:

$$\left\{ \Delta_2 \varphi - 4\pi\mu \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} \alpha + 2 F(\alpha , \varphi) + \varphi \Delta_2 \alpha = 0 ;$$

moltiplicando per α e sommando con le altre due equazioni analoghe, che riguardano le componenti v e w, si ha

$$(6) \qquad \Delta_2 \varphi - 4\pi\mu \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2 \left\{ \alpha F(\alpha , \varphi) + \beta F(\beta , \varphi) + \gamma F(\gamma , \varphi) \right\} + \\ + \varphi \left\{ \alpha \Delta_2 \alpha + \beta \Delta_2 \beta + \gamma \Delta_2 \gamma \right\} = 0 .$$

Porrò per brevità

$$\alpha F(\alpha , \varphi) + \beta F(\beta , \varphi) + \gamma F(\gamma , \varphi) = \mathrm{E}$$
$$(7) \qquad \alpha \Delta_2 \alpha + \beta \Delta_2 \beta + \gamma \Delta_2 \gamma = - \mathrm{D} ,$$

e riguardo alla E osservo subito che, ordinando i suoi termini secondo le derivate di φ, si ha

$$\mathrm{E} = \left(\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ + \left(\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\ + \left(\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

Ora dall'identità

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

si ottiene derivando rapporto ad x

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

e similmente, derivando rapporto ad y ed a z, si ottiene

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Si ha dunque identicamente

$$E = 0.$$

Quanto all'altra espressione, rappresentata con $-D$, essa si può anzitutto semplificare facendovi comparire le derivate prime di α, β e γ, invece delle derivate seconde. Infatti, derivando rapporto ad x la (8), si ottiene

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2\right\};$$

analogamente dalle (9) e (10) si ha

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = -\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = -\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Da queste tre relazioni, sommando membro a membro, si ricava

$$D = \Delta_1 \alpha + \Delta_1 \beta + \Delta_1 \gamma, \tag{11}$$

dove

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Attribuendo dunque a D o il significato espresso dalla (11) o quello equivalente espresso dalla (7), si ha

$$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + D \cdot \varphi. \tag{12}$$

Nel caso che la corrente abbia direzione costante, α, β, γ sono costanti e quindi $D = 0$; allora φ soddisfa alle stesse equazioni, a cui soddisfa una qualunque delle sue componenti.

Ma se la direzione della corrente non è costante, D in generale riesce diversa da zero e l'equazione (12) a cui soddisfa la grandezza φ della den-

sità della corrente risulta in generale diversa da quelle a cui soddisfanno le componenti u, v, w della densità medesima.

L'importanza più o meno grande che nei casi più comuni può assumere il termine $D \cdot \varphi$ rispetto ai rimanenti che entrano nell'equazione (12), è subordinata alla natura delle espressioni effettive di α, β e γ in funzione di x, y, z.

Limitando le mie considerazioni al caso più interessante per il problema che io mi sono proposto, supporrò che, almeno entro un campo sufficientemente ristretto intorno ad un punto generico qualsiasi del conduttore, le linee di corrente possano approssimatamente considerarsi come archi di cerchi aventi tutti un medesimo asse. Assumendo quest'asse per asse delle z ed orientando convenientemente gli altri due assi coordinati, le coordinate x, y, z del punto generico di una particolare linea di corrente il cui raggio sia r, si possono esprimere con formole del tipo:

$$x = r \cos \lambda$$
$$y = r \operatorname{sen} \lambda$$
$$z = \text{costante}.$$

Ora la tangente nel punto generico di quest'arco segna la direzione della corrente; si ha dunque derivando rispetto a λ,

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

e analogamente

$$\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \gamma = 0.$$

Se ne deduce facilmente che è

$$D = \Delta_1 \alpha + \Delta_1 \beta + \Delta_1 \gamma = \frac{1}{r^2}.$$

L'equazione (7) diventa dunque:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \varphi.$$

Nella generalità dei casi le linee di corrente hanno una curvatura trascurabile e quindi questa equazione si può scrivere semplicemente così:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{8}$$

Per venire adesso alla generalizzazione sopra accennata, si consideri la

famiglia di superficie, su ciascuna delle quali la densità della corrente abbia un valore costante φ.

Sia

$$z = z(x, y)$$

una di queste superficie. Suppongo che l'origine delle coordinate appartenga alla superficie e che gli assi delle x e y siano orientati come le tangenti alle linee principali di curvatura.

Colle notazioni di Monge

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

indicando con f una funzione qualsiasi delle coordinate x, y, z di un punto generico, si cerchino anzitutto le espressioni delle due derivate totali $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ intendendo che tali derivate siano calcolate col vincolare il punto a muoversi sulla superficie $z = z(x, y)$; si ha evidentemente

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z};$$

e derivando una seconda volta:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + t \frac{\partial f}{\partial z},$$

dove mancano i termini in p e q, perchè queste formule si intendono riferite all'origine, nella quale, per il modo con cui sono stati orientati gli assi, è $p = q = 0$.

In queste due ultime formule si ponga φ al posto di f e si ricordi che sulla superficie $z = z(x, y)$ è $\varphi =$ costante, e quindi $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$; ne segue senz'altro che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - r \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - t \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

onde

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (r + t) \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

ossia, indicando con s la distanza normale della superficie $z = z(x, y)$ e

ricordando che

$$r + t = \frac{1}{\varrho},$$

dove $\frac{1}{\varrho}$ è la curvatura media della superficie medesima, si ha

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial s};$$

e sostituendo in (8) si ottiene finalmente

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{9}$$

Come si vede, questa formula coincide con quella (4), che vale pei conduttori cilindrici a sezione circolare, e si può ritenere come una generalizzazione di quest'ultima, ottenuta con l'attribuire ad $\frac{1}{\varrho}$ il significato di curvatura media della superficie, sulla quale è costante la grandezza φ della densità della corrente.

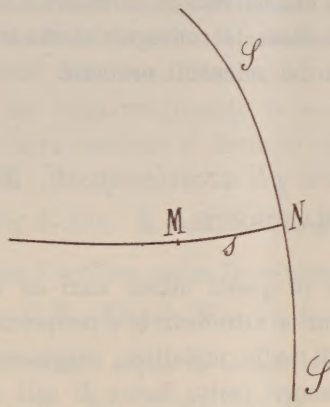

Fig. 2.

Come nella (4) il termine $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial s}$, per correnti di alta frequenza, è trascurabile di fronte agli altri due, così si è indotti a ritenere che anche nella (9) il termine

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

è trascurabile di fronte ai rimanenti e con grande approsimazione si può sostituire alla (9) l'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Conseguentemente, indicando con φ_0 il valore della grandezza della densità della corrente sopra una delle superficie, sulle quali è $\varphi =$ costante e considerando un arco $MN = s$ (fig. 2) di una delle traiettorie ortogonali

alla famiglia delle superficie medesime, contato a partire dalla superficie fissa S, per la quale $\varphi = \varphi_0$, si ha:

$$\varphi = {}_0\varphi e^{-\alpha s} \cos(\omega t - \alpha s) \tag{10}$$

dove, al solito

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\sigma}} \tag{11}$$

Dunque *per correnti di alta frequenza nel passaggio da una superficie all'altra della famiglia di superficie, sulle quali* R = *costante, la densità della corrente varia con le stesse leggi che si riferiscono ai conduttori cilindrici ed alle lastre piane.* Questa appunto è la generalizzazione, a cui è stato accennato da principio.

Essa è applicabile a tutti i casi in cui le linee di corrente siano cerchi di diametro molto grande aventi un medesimo asse, siano essi formati con spire di ugual diametro o di diametro differente, con spire di passo costante o di passo variabile, con filo di sezione circolare o di sezione differente ecc.

Mostrerò in un'altra Nota le conseguenze che se ne possono trarre relativamente alla resistenza dei solenoidi ordinari.

Chimica. — *Sopra gli azossicomposti.* Nota del Corrispondente A. Angeli e di G. Marchetti.

Le ricerche eseguite in questi ultimi anni da uno di noi hanno dimostrato che l'idrossilammina e nitrobenzolo e reciprocamente il nitrato di etile ed anilina, in presenza di sodio metallico, reagiscono fra di loro per dare origine a due prodotti isomeri (sotto forma di sali sodici) la cui struttura è senza dubbio da rappresentarsi per mezzo delle formole:

$$C_6H_5 . N = N(OH)$$
$$\|$$
$$O$$

$$C_6H_5 . N = N(OH)$$
$$\|$$
$$O$$

L'una differisce dall'altra per la diversa posizione cui è unito l'atomo di ossigeno nell'idrato di diazobenzolo da cui si possono immaginare derivate:

$$C_6H_5 . N = N(OH) .$$

Siccome taluni ammettono che tali composti contengano l'anello:

$$\begin{array}{l} -N \text{---} N- \\ \quad \backslash O / \end{array}$$

si vede subito che la costituzione di queste sostanze è intimamente collegata a quella degli azossicomposti aromatici nei quali pure, in modo arbitrario e senza nessuna base sperimentale, viene supposta la presenza dello stesso aggruppamento ciclico.

Per dare maggiore generalità alla reazione da noi scoperta ed anche per portare un nuovo contributo che servisse a chiarire la costituzione dei composti in parola, noi abbiamo fatto reagire i nitrocomposti aromatici sopra le ammine. Era da prevedersi che anche in questo caso la reazione dovesse procedere in modo perfettamente analogo. Trattando infatti anilina e nitrobenzolo con sodio metallico, dopo brevissimo tempo, si ottiene un sale che all'aria si accende spontaneamente; una determinazione di sodio rende molto probabile che al prodotto spetti la struttura (1):

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \,.\, NOONa \\ \quad\quad\quad\quad | \\ C_6H_5 \,.\, NNa \end{array}$$

Per azione dell'acqua viene facilmente idrolizzato e fra i prodotti di decomposizione si riscontrano notevoli quantità di *azossibenzolo*. Nello stesso modo si compie la condensazione della α-naftilammina con la α-nitronaftalina; in questo caso si ottiene, con buon rendimento, la *α-azossinaftalina*. Stabilito che per mezzo della nuova reazione si formano azossicomposti aromatici, identici a quelli già noti:

$$R \,.\, NH_2 + NO_2 \,.\, R = R(N_2O)R + H_2O \ ,$$

noi abbiamo fatto reagire l'anilina sopra la α-nitronaftalina

$$C_6H_5 \,.\, NH_2 + NO_2 \,.\, C_{10}H_7$$

e reciprocamente il nitrobenzolo sopra la α-naftilammina

$$C_6H_5 \,.\, NO_2 + NH_2 \,.\, C_{10}H_7 \ .$$

In tal modo siamo arrivati a due prodotti che differiscono fra di loro in modo notevole e le cui formole saranno con grande probabilità da rappresentarsi per mezzo degli schemi:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \,.\, N = N \,.\, C_{10}H_7 \\ \quad\quad\quad\

trascurando per il momento isomerie, poco verosimili, dovute a differente configurazione delle molecole [1].

Il processo di condensazione delle ammine con i nitroderivati (in presenza di sodio) è quindi di indole generale e nel seguente specchietto riuniremo i casi più importanti a cui finora l'abbiamo esteso:

(1) $(HO) . NH_2 + NO_2 \cdot C_6H_5 = HO(N_2O)C_6H_5 + H_2O$

(2) $(HO) . NH_2 + NO_2 . OC_2H_5 = HO(N_2O)OH + C_2H_6O$

(3) $C_6H_5 . NH_2 + NO_2 . OC_2H_5 = C_6H_5(N_2O)OH + C_2H_6O$

(4) $C_6H_5 . NH_2 + NO_2 . C_6H_5 = C_6H_5(N_2O)C_6H_5 + H_2O$

Come si è già detto, la (1) e la (3) conducono a prodotti isomeri e non identici.

Comunichiamo con tutto riserbo questi risultati ancora preliminari, riserbandoci di far seguire in una prossima comunicazione la descrizione delle esperienze che si riferiscono alla presente Nota.

Chimica. — *Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio.* Nota del Socio G. Körner.

Chimica. — *Intorno alla sesta nitrobiöromobenzina.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

Botanica. — *Ricerche sulla produzione artificiale della melata sulle foglie dell'olivo.* Nota del Corrispondente G. Cuboni.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Il processo di formazione degli azossicomposti scoperto da E. Bamberger (azione dei nitrosoderivati sopra le idrossilammine aromatiche) conduce sempre, come è noto, ad un prodotto simmetrico od a miscugli di prodotti simmetrici.

Matematica. — *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Nota di MARINO PANNELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Nell'ultimo paragrafo della sua classica Memoria: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischen Gebilde*, pubblicata nel volume VIII dei Mathematische Annalen, Noether esamina alcuni caratteri di una varietà a tre dimensioni, definita da un'equazione omogenea fra cinque variabili, deducendoli dalla considerazione del sistema delle superficie canoniche, tracciato sulla varietà stessa, supposta d'ordine n, dalle varietà aggiunte d'ordine $n-5$. Essi sono: il numero p, Raumgeschlecht, di queste varietà aggiunte linearmente indipendenti fra loro; il Flächengeschlecht $p^{(1)}$ e il Curvengeschlecht $p^{(2)}$ di una superficie canonica; il genere $p^{(3)}$ della curva d'intersezione di due di tali superficie; e il numero $p^{(4)}$ dei punti comuni a tre delle superficie medesime. Accanto a questi invarianti, che, in virtù del loro significato, si dicono *geometrici*, se ne possono considerare altri, che si denominano *numerici*, perchè definiti da espressioni numeriche formate con i caratteri di un sistema qualunque di superficie dato nella varietà, e con quelli del sistema aggiunto. Siffatti invarianti sostituiscono i precedenti, nei casi in cui questi non hanno più senso; coincidono con essi, quando la varietà data soddisfa a certe condizioni; infine sono nuovi caratteri invariantivi per le varietà, nelle quali queste condizioni non si trovano verificate. Lo studio degli invarianti numerici di una varietà costituisce l'oggetto della presente Nota.

Il procedimento col quale si riesce a trovare questi invarianti è naturalmente simile a quello che si segue per la ricerca degli invarianti analoghi sopra una superficie. Qui si è in particolar modo tenuta presente la Memoria di Enriques: *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, inserita nel volume XXXVII degli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Riguardo alla varietà data, si suppone che essa possa trasformarsi in un'altra W di un iperspazio affatto priva di singolarità; e a quest'ultima si intendono sempre riferite le ulteriori considerazioni.

Sui sistemi lineari S di superficie S, che si prenderanno in esame nella varietà W, si fanno ipotesi e convenzioni analoghe a quelle, che vengono ammesse nella citata Memoria di Enriques, per i sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie.

1. In questo primo numero si trovano esposte alcune proprietà, di cui si fa uso in seguito, sulla dimostrazione delle quali qui per brevità si sorvola.

I. « Il genere aritmetico P e l'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques « di una superficie F, somma di r superficie F_r, sono rispettivamente dati « dalle formole:

$$(1) \qquad P = \Sigma P_i + \Sigma g(F_i F_j) + \Sigma(F_i F_j F_h) - \frac{(r-1)(r-2)}{2}$$

$$(2) \qquad \Omega = \Sigma \Omega_i + 8\left[\Sigma g(F_i F_j) + (F_i F_j F_h) - \frac{(r-1)(r-2)}{2}\right] - [2\Sigma(F_i F_j F_h) + \Sigma(F_i F_i F_j) + 9(r-1)]$$

« dove P_i ed Ω_i sono gli invarianti analoghi di una qualunque F_i di quelle « r superficie; $g(F_i F_j)$ rappresenta il genere della curva d'intersezione (va- « riabile) di due F_i e F_j delle superficie medesime; $(F_i F_i F_j)$, il grado del « sistema lineare di curve tracciato sopra F_j dal sistema lineare di super- « ficie cui appartiene F_i; ed $(F_i F_j F_h)$, il numero dei punti comuni (varia- « bili) di tre F_i, F_j, F_h delle superficie date. Infine le somme Σ debbono « essere estese a tutti gli enti simili a quelli messi in evidenza » (1).

Dalle due formole precedenti segue immediatamente l'altra:

$$(3) \quad 8P - \Omega = 8\Sigma P_i - \Sigma\Omega_i + 2\Sigma(F_i F_j F_h) + \Sigma(F_i F_i F_j) + 9(r-1).$$

II. « Le superficie Iacobiane S_j dei sistemi lineari ∞^3 contenuti in un « sistema lineare $|S|$ (∞^3 almeno) di superficie S, dato nella varietà W, « appartengono ad un medesimo sistema lineare ».

Questo sistema può contenere elementi fissi; ed effettivamente contiene una curva fissa, o un determinato numero di punti fissi, se il sistema $|S|$ è ∞^4, oppure ∞^5. Tali elementi si riguardano come virtualmente non esistenti, e così risulta un sistema lineare completo, che si chiama *sistema Iacobiano*, e si indica col simbolo $|S_j|$.

III. « Ogni superficie S_j del sistema $|S_j|$ taglia una superficie assegnata S « del sistema dato $|S|$ secondo una curva che appartiene al sistema Iacobiano « determinato sopra questa superficie dal sistema caratteristico della super- « ficie medesima ».

IV. « Dato nella varietà W un sistema lineare ∞^3 di superficie S, « virtualmente privo di elementi base, la Iacobiana del sistema $|S+T|$, « che si ottiene sommando ad $|S|$ una superficie T, si compone della Iaco- « biana del sistema $|S|$ e della superficie T contata quattro volte ».

Si dice *sistema aggiunto* ad un sistema dato $|S|$ e si indica con $|S_a|$, il sistema definito dalla relazione simbolica:

$$(4) \qquad |S_a| = |S_j - 3S|.$$

(1) Per un caso particolare delle formole (1) e (2), veggasi il n. 4 *a*) del § 1° della Memoria di Severi: *Su alcune questioni di postulazione.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII.

Si indicherà con n il grado del sistema $|S|$, e con p il genere della curva d'intersezione (variabile) di due superficie del sistema medesimo; n_a e p_a avranno i significati analoghi rispetto al sistema aggiunto $|S_a|$; ossia si porrà:

$$(5)\quad (SSS) = n \quad , \quad g(SS) = p \quad , \quad (S_a S_a S_a) = n_a \quad , \quad g(S_a S_a) = p_a .$$

In virtù del teorema IV e della data definizione di sistema aggiunto, si dimostra come nel caso delle superficie:

V. « Se $|S$ ed $|S'$ sono due sistemi lineari irriducibili, virtualmente privi « di elementi base, si ha:

$$(6)\quad |S + S'|_a = |S + S'_a| = |S_a + S'| .$$

Dalla relazione (4) segue:

$$|(SS_a)| = |(SS_j) - 3(SS)|$$

e di qui, tenendo presente il teorema III e ricordando che una curva canonica di una superficie, presa insieme alle curve eccezionali e a tre curve di una qualunque rete irriducibile, costituisce una curva appartenente al sistema lineare completo determinato dalla Iacobiana della rete, si deduce:

VI. « Ogni superficie S_a del sistema $|S_\alpha|$ taglia una superficie assegnata S « del sistema S_1, fuori delle curve eccezionali di questa superficie, secondo « una curva canonica della superficie medesima ».

Quindi detto Ω l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S, si hanno le relazioni:

$$(7)\quad g(SS_a) = \Omega \quad , \quad (SS_a S_a) = \Omega - 1$$

dalle quali segue:

$$(8)\quad g(SS_a) = (SS_a S_a) + 1 .$$

Infine si osservi che si ha ancora:

$$(9)\quad (SSS_a) = 2(p - 1) - n .$$

2. Si applichi la relazione (8) anzichè al sistema $|S|$, al sistema $|S + S_a|$; osservando che il sistema aggiunto a quest'ultimo, per la proprietà V del numero precedente è $|S_a + S_a| = |2S_a|$, si ottiene:

$$(10)\quad g(S + S_a , 2S_a) = (S + S_a , 2S_a , 2S_a) + 1 .$$

Ora si ha:

$$g(S + S_a , 2S_a) = 2g(SS_a) + 2g(S_a S_a) + 3(SS_a S_a) + (S_a S_a S_a) - 3$$

ossia per le formole (5) e (7):

$$g(S + S_a , 2S_a) = 5\Omega + 2p_a + n_a - 6 .$$

Inoltre:

$$(S + S_a , 2S_a , 2S_a) = 4(SS_a S_a) + 4(S_a S_a S_a) = 4\Omega + 4n_a - 4 .$$

Sostituendo questi valori nell'eguaglianza (10), si trova:

I. « Fra il grado n_a e il genere p_a ha luogo la relazione:

$$3n_a - 2p_a = \Omega - 3 . \tag{11}$$

In virtù della prima delle formole (7), il genere della curva $(S + S_a , 2S_a)$ è dato dall'invariante di Castelnuovo-Enriques relativo alla superficie $S + S_a$. Quindi calcolando questo invariante per mezzo della formola (2), si ha altresì:

$$g(S + S_a , 2S_a) = \Omega + \Omega_a + 8g(SS_a) - (SSS_a) - (SS_a S_a) - 9$$

ossia per le (7) e la (9):

$$g(S + S_a , 2S_a) = \Omega_a + 8\Omega - 2p + n - 6 .$$

Con questa nuova espressione del $g(S + S_a , 2S_a)$ e conservando per $(S + S_a , 2S_a , 2S_a)$ il valore precedentemente calcolato, l'eguaglianza (10) somministra ancora:

II. « Fra i caratteri n_a ed Ω_a ha luogo la relazione:

$$4n_a - \Omega_a = 4\Omega - 2p + n - 3 . \tag{12}$$

Eliminando Ω fra la (11) e la (12) si ha infine:

III. « Fra i tre caratteri n_a , p_a ed Ω_a ha luogo la relazione:

$$\Omega_a + 8(n_a - p_a) = 2p - n - 9 . \tag{13}$$

3. In virtù del teorema V del n. 1, il genere aritmetico di una superficie $S + S'_a$ è eguale a quello di una superficie $S_a + S'$. Quindi per la formola (1), si ha intanto:

$$P + P'_a + g(SS'_a) = P' + P_a + g(S' S_a) \tag{14}$$

Inoltre dalla relazione (6) segue ancora:

$$(S_a S) + (S_a S'_a) = (S_a S_a) + (S_a S')$$
$$(S'_a S) + (S'_a S'_a) = (S'_a S_a) + (S'_a S')$$

donde, sommando, si ricava:

$$(SS_a) + (SS'_a) + (S'_a S'_a) = (S' S'_a) + (S' S_a) + (S_a S_a)$$

epperò:

$$g(SS_a) + g(SS'_a) + g(S'_a S'_a) + (SS_a S'_a) + (SS'_a S'_a)$$
$$= g(S' S'_a) + g(S' S_a) + g(S_a S_a) + (S' S'_a S_a) + (S' S_a S_a)$$

La stessa relazione (6) dà:

$$(SS_a S_a) + (S'_a S_a S_a) = (S_a S_a S_a) + (S' S_a S_a)$$
$$(SS_a S'_a) + (S'_a S_a S'_a) = (S_a S_a S'_a) + (S' S_a S'_a)$$
$$(SS'_a S'_a) + (S'_a S'_a S'_a) = (S_a S'_a S'_a) + (S' S'_a S'_a)$$

donde, sommando, si deduce:

$$(SS_a S'_a)+(SS'_a S'_a)+(SS_a S_a)+(S'_a S'_a S'_a)=(S' S'_a S_a)+(S' S_a S_a)+S' S'_a S'_a)+(S_a S_a S_a).$$

Sottraendo, questa eguaglianza dalla precedente, si ottiene:

$$g(SS_a) + g(SS'_a) + g(S'_a S'_a) - (SS_a S_a) - (S'_a S'_a S'_a)$$
$$= g(S' S'_a) + g(S' S_a) + g(S_a S_a) - (S' S'_a S'_a) - (S_a S_a S_a)$$

ossia, per le formole (5) e (7), e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ ed $|S'_a|$:

$$p'_a - n'_a + g(SS'_a) = p_a - n_a + g(S' S_a).$$

Infine, si sottragga questa eguaglianza dalla (14); dalla risultante segue immediatamente:

$$P_a - P + n_a - p_a = P'_a - P' + n'_a - p'_a.$$

Dunque:

I. « L'espressione

$$\Delta = P_a - P + n_a - p_a + 3 \tag{15}$$

« è un invariante della varietà ».

Sostituendo ad $n_a - p_a$ il suo valore dato dalla (13), si ha ancora:

II. « L'invariante Δ è anche espresso dalla formola:

$$8\Delta = 8P_a - \Omega_a - 8P + 2p - n + 15. \tag{16}$$

4. In virtù della relazione (6), si ha:

$$g(S + S', S + S'_a) = g(S' + S, S' + S_a)$$

donde, calcolando questi due generi segue:

$$g(SS) + g(SS'_a) + g(S' S'_a) + (SSS') + (SSS'_a) + 2(SS' S'_a)$$
$$= g(S' S') + g(S' S_a) + g(SS_a) + (S' S' S) + (S' S' S_a) + 2(S' SS_a)$$

La stessa relazione (6) dà:

$$(SSS) + (SSS'_a) = (SSS_a) + (SSS')$$
$$(S' S' S) + (S' S' S'_a) = (S' S' S_a) + (S' S' S')$$
$$(SS' S) + (SS' S'_a) = (SS' S_a) + (SS' S')$$

donde facilmente si deduce:

$$(SSS') + (SSS'_a) + 2(SS'S'_a) + (S'S'S'_a) - (S'S'S') \\ = (S'S'S) + (S'S'S_a) + 2(S'SS_a) + (SSS_a) - (SSS) .$$

Sottraendo questa eguaglianza dalla precedente, si ottiene:

$$g(SS) + g(SS'_a) + g(S'S'_a) - (S'S'S'_a) + (S'S'S') \\ = g(S'S') + g(S'S_a) + g(SS_a) - (SSS_a) + (SSS)$$

ossia, per le formole (5), (7) e (9), e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ ed $|S'_a|$:

$$\Omega' + p - 2p' + 2n' + g(SS'_a) = \Omega + p' - 2p + 2n + g(S'S_a) .$$

Infine, si sottragga questa eguaglianza dalla (14); dalla risultante segue immediatamente:

$$P_a - P - \Omega + 3p - 2n = P'_a - P' - \Omega' + 3p' - 2n'$$

Dunque:

I. « L'espressione

$$\Delta^{(1)} = P_a - P - \Omega + 3p - 2n - 3 \tag{17}$$

« è un invariante della varietà ».

Dalle relazioni (16) e (17) segue subito:

$$8(\Delta^{(1)} - \Delta) = \Omega_a - 8\Omega + 22p - 15n - 39$$

e quindi posto:

$$\Delta^{(2)} = \Omega_a - 8\Omega + 22p - 15n - 14 \tag{18}$$

si ha intanto:

II. « L'espressione $\Delta^{(2)}$ è un invariante della varietà ».

Ed inoltre:

III. « Fra gli invarianti Δ, $\Delta^{(1)}$ e $\Delta^{(2)}$ ha luogo la relazione:

$$8(\Delta^{(1)} - \Delta) = \Delta^{(2)} - 25 . \tag{19}$$

5. In virtù del teorema V del n. 1, il grado del sistema $|S + S'_a|$ è eguale a quello del sistema $|S' + S_a|$; quindi, calcolando questi due gradi, si ha:

$$(SSS) + 3(SSS'_a) + 3(SS'_aS'_a) + (S'_aS'_aS'_a) \\ = (S'S'S') + 3(S'S'S_a) + 3(S'S_aS_a) + (S_aS_aS_a) .$$

La relazione (6) dà ancora:

$$(SSS'_a) + (S'_aSS'_a) = (S_aSS'_a) + (S'SS'_a)$$
$$(SS'S_a) + (S'_aS'S_a) = (S_aS'S_a) + (S'S'S_a)$$
$$(S_aSS_a) + (S'SS_a) = (SSS_a) + (S'_aSS_a)$$
$$(S_aS'S'_a) + (S'S'S'_a) = (SS'S'_a) + (S'_aS'S'_a)$$

donde facilmente si deduce:

$$(SSS'_a) + (SS'_a S'_a) - (SS_a S_a) - (S' S' S'_a)$$
$$= (S' S' S_a) + (S' S_a S_a) - (S' S'_a S'_a) - (SSS_a) .$$

Sottraendo questa eguaglianza, dopo averne moltiplicati ambo i membri per 3, dalla precedente, si ottiene:

$$(SSS) + 3(SS_a S_a) + 3(S' S' S'_a) + (S'_a S'_a S'_a)$$
$$= (S' S' S') + 3(S' S'_a S'_a) + 3(SSS_a) + (S_a S_a S_a)$$

donde, per le formole (5), (7) e (9) e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ e $|S'_a|$, segue immediatamente:

$$n_a - 3\Omega + 6p - 4n = n'_a - 3\Omega' + 6p' - 4n' .$$

Dunque:

I. « L'espressione

(20) $$\Delta^{(3)} = n_a - 3\Omega + 6p - 4n - 3$$

« è un invariante della varietà ».

Dalle relazioni (15), (17) e (20) segue subito:

$$\Delta^{(1)} + \Delta^{(3)} - \Delta = p_a - 4\Omega + 9p - 6n - 9$$

e quindi posto:

(21) $$\Delta^{(4)} = p_a - 4\Omega + 9p - 6n - 5$$

si ha intanto:

II. « L'espressione $\Delta^{(4)}$ è un invariante della varietà ».

Ed inoltre:

III. « Fra gli invarianti Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ ha luogo la relazione:

(22) $$\Delta^{(1)} + \Delta^{(3)} - \Delta^{(4)} = \Delta - 4 .$$

Infine, se dalle formole (18), (20) e (21) si ricavano i valori di Ω_a, n_a e p_a, e questi si sostituiscono nelle (11) e (12), si ottiene ancora:

IV. « Fra gli invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ hanno luogo le due relazioni:

(23) $$\begin{cases} \Delta^{(2)} - 1 = 4\Delta^{(3)} \\ 2\Delta^{(4)} - 2 = 3\Delta^{(3)} \end{cases}$$

Facendo le medesime sostituzioni nella formola (13), si ricava un'altra relazione fra questi stessi invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$, che è quella stessa che si otterrebbe eliminando $\Delta^{(1)} - \Delta$ fra la (19) e la (22): essa però è una conseguenza delle due precedenti (23).

Sarà dimostrato in una prossima Nota, che Δ è un invariante assoluto, mentre $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ sono invarianti relativi; ed inoltre che questi coincidono con gli invarianti $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(4)}$ e $p^{(3)}$ di Noether nel caso in cui la varietà non contenga elementi eccezionali.

Matematica. — *Sul Principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

Meccanica. — *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.* Nota di Giuseppe Lauricella, presentata dal Socio U. Dini.

Matematica. — *Sopra una ricerca di limite.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Matematica. — *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions cylindriques.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

§ 1. *Développements des deux produits* $J^{\nu}(x)\,J^{\pm\nu}(ix)$. — Dans mon *Traité des fonctions cylindriques* (1) j'ai donné la formule générale

$$(1)\qquad J^{\nu}(\alpha x)\,J^{\rho}(\beta x) = \alpha^{\nu}\,\beta^{\rho}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^{s}\,A_s\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\rho+2s},$$

où il faut admettre

$$(2)\qquad A_n = \frac{\alpha^{2n}\cdot F\left(-\nu-n\,,\,-n\,,\,1+\varrho\,,\,\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}{n!\,\Gamma(\varrho+1)\,\Gamma(\nu+n+1)};$$

il saute aux yeux que le cas particulier $\alpha=\beta=1$ présente un intérêt par-

(1) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 20. Leipzig 1904.

ticulier, parce que la formule de Gauss nous permet de donner sous simple forme la série hypergéométrique qui figure au second membre de (2).

Or, il est très intéressant, ce me semble, que ces deux autres cas particuliers $\alpha = 1$, $\beta = i$, $\varrho = \pm \nu$ nous conduisent à des résultats analogues et aussi simples que le précédent.

En effet, étudions tout d'abord le cas $\varrho = \nu$, il s'agit de déterminer sous simple forme la série hypergéométrique

$$F(-\nu - n, -n, 1+\nu, -1) = 1 + \\ + \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot \frac{(\nu+n)(\nu+n-1)\dots(\nu+n-s+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+s)}.$$

Cela posé, remarquons que nous avons évidemment

$$F(-\nu - 2n - 1, -2n - 1, 1+\nu, -1) = 0,$$

ce qui s'accorde bien avec la forme même de la série ordinaire qui représente la fonction cylindrique de première espèce, il ne nous reste qu'à la détermination de la somme susdite pour des valeurs *paires* de n.

A cet effet, écrivons sous cette forme plus simple la somme dont il s'agit

$$(3)\quad \begin{cases} S_n(\nu) = 2 + 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{s} \cdot \frac{(\nu+2n)(\nu+2n-1)\dots(\nu+2n-s+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+s)} + \\ \qquad + (-1)^n \binom{2n}{n} \cdot \frac{(\nu+2n)(\nu+2n-1)\dots(\nu+n+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n)}, \end{cases}$$

nous aurons, après une simple réduction, cette équation aux différences finies

$$(4)\qquad S_n(\nu+1) - S_n(\nu) = \frac{2n(2n-1)}{(\nu+1)(\nu+2)} \cdot S_{n-1}(\nu).$$

Remarquons ensuite qu'un calcul direct donnera, en vertu de (3), pour de petites valeurs de r, une expression de la forme

$$(5)\qquad S_r(\nu) = (-1)^r \frac{(2)r!}{r!} \cdot \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+r)},$$

puis supposons vraie pour $r = n-1$ la formule (5), l'équation aux différences finies (4) aura comme solution générale une fonction de la forme

$$(6)\qquad f_n(\nu) = (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n)} + C(\nu),$$

où $C(\nu)$ désigne une fonction arbitraire assujettie à satisfaire à la condition de périodicité $C(\nu+1) = C(\nu)$.

Or, dans le cas particulier, où la fonction $f_n(\nu)$ est une fonction *rationnelle* de ν, $C(\nu)$ doit être indépendante de ν, de plus, remarquons l'identité $S_n(\infty) = 0$, tirée directement de (3), nous aurons dans le cas particulier

susdit $C(\nu) = 0$, ce qui montrera clairement que la formule (5) est vraie pour une valeur quelconque de r.

Cela posé, la formule générale (1) donnera finalement la série de puissances très intéressante

$$(7) \qquad J^{\nu}(x)\, J^{\nu}(ix) = i^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+4s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)\,\Gamma(\nu+2s+1)},$$

qui est certainement nouvelle.

Dans le second cas $\varrho = -\nu$, il s'agit de trouver sous simple forme la somme

$$F(-\nu-n, -n, 1-\nu, -1).$$

A cet effet, prenons pour point de départ la formule de Gauss [1]

$$(\beta-1-(\gamma-\alpha)x)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)+(\gamma-\beta+1)\cdot F(\alpha,\beta-1,\gamma+1,x) = \gamma(1-x)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

nous aurons immédiatement

$$F(-1-\nu-n, -n, -\nu, -1) = -\frac{n+1-\nu}{2\nu}\cdot F(-1-n-\nu, -n-1, 1-\nu, -1),$$

d'où après une simple réduction

$$F(-\nu-2n, -2n, 1-\nu, -1) = \frac{2^n\cdot(\nu+1)(\nu+3)\ldots(\nu+2n-1)}{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\left(2-\frac{\nu}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$F(-\nu-2n-1, -2n-1, 1-\nu, -1) = -\frac{2^n\cdot\nu(\nu+2)\ldots(\nu+2n)}{\frac{1-\nu}{2}\cdot\frac{3-\nu}{2}\cdots\frac{2n+1-\nu}{2}}$$

ce qui donnera en vertu des propriétés fondamentales et très connues de la fonction gamma :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} i^{\nu}\, J^{\nu}(x)\, J^{-\nu}(ix) = \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4s}}{(2s)!\,\Gamma\left(s+\frac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{2-\nu}{2}\right)} - \\ -\sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4s+2}}{(2s+1)!\,\Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

[1] *Disquisitiones generales circa functiones a serie infinita* etc. § 8. Comment. Gotting. t. 2; 1813.

d'où en mettant $-ix$ au lieu de x, ces deux formules plus élégantes

$$(9)\quad \begin{cases} i^{\nu}\,J^{\nu}(x)\,J^{-\nu}(ix) + i^{-\nu}\,J^{\nu}(ix)\,J^{-\nu}(x) = \\ \qquad = 2\cos\dfrac{\pi\nu}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4s}}{(2s)!\,\Gamma\left(s+\dfrac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\dfrac{2-\nu}{2}\right)} \\ i^{\nu}\,J^{\nu}(x)\,J^{-\nu}(ix) - i^{-\nu}\,J^{\nu}(ix)\,J^{-\nu}(x) = \\ \qquad = 2\sin\dfrac{\pi\nu}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4s+2}}{(2s+1)!\,\Gamma\left(s+\dfrac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\dfrac{3-\nu}{2}\right)}; \end{cases}$$

les trois dernières formules sont certainement nouvelles aussi.

§ 2. *Applications: Equation différentielle, intégrales définies.* — Le développement trouvé de (8) pour la fonction

$$y = J^{\nu}(1\sqrt{x})\,J^{\nu}(1\sqrt{-x})$$

nous conduira naturellement à chercher pour y une équation différentielle de la forme

$$(10)\qquad y^{(4)} + \frac{a}{x}\,y^{(3)} + \frac{b}{x^2}\,y^{(2)} + \frac{c}{x^3}\,y^{(1)} + \left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{d}{x^4}\right)y = 0.$$

A cet effet, introduisons dans (10) la série susdite, puis mettons

$$\omega = \nu + 2s \quad , \quad s = \frac{\omega - \nu}{2} \quad , \quad s + \nu = \frac{\omega + \nu}{2},$$

il résulte, en cherchant le coefficient de la puissance $x^{\nu+2s-4}$, une condition de la forme

$$\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3) + a\,\omega(\omega-1)(\omega-2) + b\,\omega(\omega-1) + c\,\omega + d + \\ + 4\,\alpha\,\omega(\omega-1)(\omega^2-\nu^2) = 0$$

qui doit être satisfaite par une infinité de valeurs de ω, ce qui donnera immédiatement l'équation différentielle cherchée

$$(11)\qquad y^{(4)} + \frac{5}{x}\,y^{(3)} + \frac{4-\nu^2}{x^2}\,y^{(2)} - \frac{1}{4x^2}\cdot y = 0,$$

qui est extrêmement simple.

Cherchons maintenant l'intégrale complète de (11) en y introduisant la série

$$y = \sum_{s=0}^{s=\infty} c_s\cdot x^{k+2s},$$

nous aurons, après une légère transformation de la variable indépendante, la proposition suivante:

L'intégrale complète de l'équation différentielle

$$(12)\qquad Z^{(4)} + \frac{4}{x}\cdot Z^{(3)} + \frac{1-4\nu^2}{x^2}\cdot Z^{(2)} - \frac{1-4\nu^2}{x^3}\cdot Z^{(1)} - 4Z = 0$$

se présente sous la forme

$$(13)\quad Z = c_1 J^\nu(x)\, J^\nu(ix) + c_2 J^\nu(x)\, Y^\nu(ix) + c_3 J^\nu(ix)\, Y^\nu(x) + c_4 Y^\nu(x)\, Y^\nu(ix),$$

où Y *désigne la fonction cylindrique de seconde espèce, tandis que les c sont des constantes par rapport à* x.

Comme une autre application des formules du § 1 nous avons à déterminer quelques intégrales définies d'une simple forme.

A cet effet, appliquons tout d'abord l'intégrale *eulérienne* de seconde espèce

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, t^{\nu-1}\, dt = \frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu}\quad,\quad \Re(x) \geqq 0\quad,\quad \Re(\nu) > 0,$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (7) et (8), ces deux formules intégrales

$$(14)\qquad \int_0^\infty J^\nu\left(\sqrt{2+x}\right) J^\nu\left(\sqrt{-2+x}\right) e^{-t}\, dt = J^\nu(ix)$$

$$(15)\qquad i^\nu \int_0^\infty J^\nu\left(\sqrt{2+x}\right) J^{-\nu}\left(\sqrt{-2+x}\right) e^{-t}\, dt = \boldsymbol{\Pi}^\nu(ix) - i\, \boldsymbol{X}^\nu(ix),$$

où $\boldsymbol{\Pi}$ et $\boldsymbol{X}$ désignent les fonctions de Poisson-Anger [1], savoir:

$$\boldsymbol{\Pi}^\nu(x) = \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma\left(s+\frac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{2-\nu}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{X}^\nu(x) = \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)};$$

dans (14) il faut supposer $\Re(\nu) > -1$, tandis que (15) est valable pour une valeur finie quelconque de ν.

Cela posé, appliquons la formule de Weierstrass [2]

$$(16)\qquad \frac{1}{\Gamma(\varrho)} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_w e^t\cdot t^{-\varrho}\, dt,$$

[1] Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 47. Leipzig 1904.

[2] Voir mon: Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 147. Leipzig 1906.

où w désigne un chemin d'intégration qui renferme l'axe des nombres négatifs avec l'orgine en entourant dans le sens direct ce dernier point, nous aurons immédiatement ces inversions des formules (14) (15)

$$(17) \qquad J^{\nu}(1\sqrt{x})\,J^{\nu}(1\sqrt{-x}) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{w}\frac{e^{t}}{t}\cdot J^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right)dt$$

$$(18) \qquad J^{\nu}(1\sqrt{x})\,J^{-\nu}(1\sqrt{-x}) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi i}\cdot\int_{w}\frac{e^{t}}{t}\left(H^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right) - X^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right)\right)dt,$$

formules qui sont valables pour des valeurs finies quelconques de x et ν.

§ 3. *Séries analogues à celles de C. Neumann.* — L'intégrale curviligne (17) que nous venons de développer est d'un grand intérêt.

En effet, considérons en premier lieu cette série *neumanienne* de première espèce (1)

$$(19) \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!}\cdot J^{\nu+2s}(x),$$

valable pour une valeur finie quelconque de x, tandis que ν ne doit pas être égal à un négatif entier, les formules (16), (17) donnent immédiatement ce développement analogue

$$(20) \qquad \frac{\left(\frac{ix}{4}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!}\,J^{\nu+2s}(1\sqrt{x})\,J^{\nu+2s}(1\sqrt{-x}),$$

valable où l'est (19).

En second lieu introduisons la série *kapteynienne* (2) de première espèce

$$(21) \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \nu^{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\nu+s)}{s!\,(\nu+2s)^{\nu+1}}\cdot J^{\nu+2s}((\nu+2s)\,x),$$

où ν ne doit pas être égal à un négatif entier; dans le cas $\nu = 0$, la formule (21) se réduit à l'identité $1 = 1$, tandis que la série générale (21) est certainement absolument convergente pourvu que $|x| < \omega$, où ω désigne la racine positive de cette équation transcendante

$$\frac{x}{2}\cdot e^{1+\frac{x^{2}}{4}} = 1 \quad , \quad \omega = 0{,}659...$$

Cela posé, nous aurons évidemment, en vertu de (17), ce développement analogue

$$(22) \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{ix}{4}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \nu^{2}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma\ (\nu+s)}{s!\,(\nu+2s)^{\nu+1}}\cdot \\ \qquad\qquad \cdot J^{\nu+2s}\left(1\sqrt{(\nu+2s)\,x}\right)\cdot J^{\nu+2s}\left(1\sqrt{-(\nu+2s)\,x}\right)\end{array}\right.$$

(1) Zylinderfunktionen, p. 273.

(2) Ibid., p. 303.

qui est valable pour une valeur finie quelconque de x, pourvu que ν ne soit pas égal à un négatif entier.

Considérons maintenant la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1\left(\frac{x}{4}\right) + a_2\left(\frac{x}{4}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots \tag{23}$$

dont le rayon de convergence et égal à ϱ, puis mettons dans (21) (22) $\nu+1, \nu+2, \nu+3, \ldots$ au lieu de ν, une application de la méthode que j'ai expliquée dans mes recherches sur les séries *neumanniennes* (1) donnera ce théorème nouveau :

La série de puissances (23) *est développable en séries de fonctions cylindriques, comme suit:*

$$f(x) = \left(\frac{4}{ix}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^{-s} \cdot A_s \cdot J^{\nu+s}\left(\sqrt{x}\right) J^{\nu+s}\left(\sqrt{-x}\right) \tag{24}$$

$$f(x) = \left(\frac{4}{ix}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^{-s} \cdot B_s \cdot J^{\nu+s}\left(\sqrt{(\nu+s)x}\right) J^{\nu+s}\left(\sqrt{-(\nu+s)x}\right), \tag{25}$$

où nous avons posé pour abréger

$$A_n = (\nu+n) \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \Gamma(\nu+n-2s+1)\,\Gamma(\nu+n-s) \cdot a_{n-2s} \tag{26}$$

$$B_n = \frac{1}{(\nu+n)^{\nu+1}} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (\nu+n-2s)^2}{s!\,(\nu+n)^{n-2s}} \cdot \Gamma(\nu+n-2s+1)\,\Gamma(\nu+n-s) \cdot a_{n-2s}: \tag{27}$$

Les deux séries ainsi obtenues et la série de puissances donnée sont en même temps convergentes, oscillantes ou divergentes, et la convergence est toujours du même caractère: absolue ou non, uniforme ou non.

Remarquons encore que les deux séries (24) et (25) présentent la même analogie que j'ai développée, dans mon *Traité* (2) susdit, entre les séries *neumanniennes* et *kapteyniennes*.

On voit du reste que les deux coefficients A_n et B_n deviennent généralement plus compliqués que ceux obtenus en développant en séries *neumanniennes* ou *kapteyniennes* la même fonction $f(x)$. La raison de ce fait est à chercher dans le diviseur $\Gamma(\nu+1)$ qui figure aux premiers membres des deux développements fondamentaux (20) et (22).

(1) Loc. cit. p. 266.

(2) Zylinderfunktionen, p. 303.

Considérons maintenant ce développement bien connu (1)

$$(28)\quad J^{\nu}(\alpha x) = \alpha^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)} \cdot F(\nu+s\,,\,-s\,,\,\nu+1\,,\,\alpha^2)\,J^{\nu+2s}(x)$$

applicable pour des valeurs finies quelconques de x et α, la formule (17) donnera immédiatement la formule analogue:

$$(29)\quad J^{\nu}(\sqrt{\alpha x})\,J^{\nu}(\sqrt{-\alpha x}) = \alpha^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)} \cdot$$

$$\cdot F(\nu+s\,,\,-s\,,\,\nu+1\,,\,\alpha^2)\,J^{\nu+2s}(\sqrt{x})\,J^{\nu+2s}(\sqrt{-x})\,,$$

qui est valable où l'est (28).

Pour accentuer la flexibilité extrêmement grande des fonctions cylindriques nous avons à citer encore ces développements particuliers

$$(30)\quad 1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s\, J^{\nu+2s}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s (J^s(x))^2 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s\, J^s(x)\, J^s(ix)\,,$$

où nous avons posé pour abréger $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_s = 2$ pour $s \geq 1$. Les deux dernières de ces formules (30) sont des conséquences immédiates de la première, comme le montrent clairement la formule intégrale (17) et une formule analogue que j'ai développée dans une Note qui paraîtra dans le Journal de Crelle.

Fisica. — *Separazione quantititativa del radiotorio dai fanghi di Echaillon e Salins Moutier* (2) Nota di O. Angelucci, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Fin dai primi studi di Blanc (3) *Sui costituenti radioattivi dei sedimenti di Echaillon e Salins Moutiers* veniva dimostrata chiaramente la stretta analogia che la nuova sostanza radioattiva ha col torio. Era dunque di grande interesse poterne avere a disposizione una certa quantità per completarne lo studio fisico, e per stabilire, ove fosse possibile, oltre al peso atomico, qualche tipo di combinazione che permettesse di classificare il nuovo elemento nel sistema di Mendelejeff.

Contemporaneamente a Blanc, Hahn (4) aveva intrapreso questo studio, e dalle misure eseguite da Sackur (5) e da altri, riuscì a stabilire la so-

(1) Loc. cit. p. 275.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico-Farmaceutico della R. Università di Roma.

(3) Phil. Mag., gennaio 1905; Comptes Rendus 1er. Congrès Radiologie, Liège, 1906; Rendic. Acc. Lincei, XIV, 2° sem. pag. 322; XV, 1° sem. pagg. 328, 349.

(4) Z. ph. Ch. 51, 717.

(5) Ber. 38, 1756.

miglianza delle proprietà radioattive di esso con quelle dei sali di torio, ed appunto per questo lo chiamò *radiotorio*.

Chimicamente crede che appartenga al gruppo dell'ammoniaca; ma a me sembra ancora prematuro un giudizio in proposito, perchè sebbene questo elemento precipiti quantitativamente con ammoniaca, precipita quantitativamente anche insieme al solfato ed al carbonato di calcio ed ha l'ossalato insolubile; quindi potrebbe con maggior probabilità appartenere al gruppo del carbonato ammonico. Ed è anche da osservare che il precipitato che si ottiene con l'ammoniaca, può darsi che sia costituito non dall'idrato, ma dal carbonato formantesi per azione dell'anidride carbonica dell'aria.

Il materiale di cui Hahn si servì per l'estrazione del radiotorio fu un campione di torianite del Ceylan acquistato da Sir William Ramsay, che venne lavorato nella fabbrica Tyrer e C° di Londra e dal dott. Denison. Da k. 250 di minerale si ebbero 18 gr. di carbonati insolubili, da cui fu separato il radio col metodo di Giesel. Le acque madri furono trattate con idrogeno solforato, e nel liquido filtrato fu precipitato il radiotorio con ammoniaca.

La quantità estremamente piccola di materiale che io avevo a disposizione (circa 200 gr. di fango) rendevano impossibile l'applicazione del metodo adoperato nella lavorazione della torianite; e nemmeno potevo servirmi della cristallizzazione frazionata della parte di fango solubile in acido cloridrico, perchè la grande quantità di ferro presente penetrava nei cristalli che si formavano ed anche perchè parte della sostanza attiva veniva trascinata da essi. Anche gli altri metodi studiati da Hahn non erano applicabili, non solo perchè non permettevano una separazione quantitativa dell'elemento attivo, ma anche perchè non era con essi possibile isolarlo dal ferro.

Era perciò necessario di trovare un metodo nuovo che permettesse di separare una quantità infinitamente piccola di sostanza da un complesso di sali di cui una parte avevano molte proprietà chimiche comuni.

Una concentrazione di attività abbastanza considerevole era già stata ottenuta da Blanc precipitando con ammoniaca la soluzione cloridrica del fango. Da questo precipitato non era però possibile isolare la parte attiva dagli altri idrati (costituiti per la massima parte da ferro e manganese) con cui era mescolata; inoltre nel liquido ne rimaneva ancora una quantità rilevante.

Dopo una numerosa serie di tentativi diretti specialmente alla separazione del radiotorio dagli elementi che precipitano con ammoniaca, mi accorsi che precipitando il calcio allo stato di solfato dalla soluzione cloridrica del fango, la parte attiva veniva quasi totalmente asportata.

Lavando però con acqua il precipitato raccolto su di un filtro per eliminare i sali di ferro la parte attiva si disciogliева, e nel precipitato non ne rimanevano che piccole traccie. Sicchè anche questo metodo che sembrava dare così buoni risultati, non era praticabile; ciò non ostante rendeva possibile una concentrazione abbastanza forte della sostanza attiva.

Per questo, prima di abbandonarlo, volli provare se, profittando della solubilità del cloruro ferrico nell'alcool e dell'insolubilità del solfato di calcio nello stesso solvente, fosse possibile ottenere un precipitato contenente soltanto solfato di calcio e radiotorio.

Alla soluzione cloridrica del fango aggiunsi metà del suo volume di alcool e alcuni cm^3 di acido solforico. Dopo poco tempo si incominciarono a formare dei cristallini di solfato di calcio, che il giorno vegnente raccolsi filtrandoli alla pompa e lavandoli ripetutamente con alcool a 90 per liberarli di tutto il cloruro ferrico di cui erano impegnati. In questo modo riuscii ad ottenere un solfato di calcio la cui soluzione dava appena la reazione del ferro col solfocianato, e che, dalle misure fatte dal dott. Blanc, risultava contenere la totalità della sostanza attiva.

Con questo artifizio così semplice mi era perciò possibile di isolare quantitativamente la parte attiva degli altri elementi contenuti nel fango, e, ciò che più interessava, da quelli che precipitano con ammoniaca.

Il solfato di calcio attivo così ottenuto lo disciolgievo in acqua acidulata con acido cloridrico e aggiungendo ammoniaca alla soluzione, ottenevo un precipitato contenente tutta la parte attiva.

Di questo metodo di separazione ho fatto il seguente controllo: ho trattati gr. 100 di fango ben polverizzati e secchi con due litri circa di acido cloridrico concentrato, facendo digerire a leggero calore in modo da non disciogliere la silice (60-70) per tre giorni. Sul principio si notava un copioso schiumeggiamento dovuto all'anidride carbonica messa in libertà, ed un abbondante sviluppo di cloro prodotto dalla presenza di ossidi superiori di manganese. Terminata la reazione, diluii con acqua la soluzione cloridrica concentrata e raccolsi su di un filtro la parte rimasta indisciolta, costituita per la massima parte di silice, lavandola accuratamente.

La parte indisciolta rappresentava il 15 % del fango.

Bollita con carbonato sodico si potè estrarre da questa qualche traccia di attività tipo radio.

Alla soluzione cloridrica convenientemente concentrata insieme alle acque di lavaggio, aggiunsi alcuni cm^3 di acido solforico e circa $^1/_2$ litro d'alcool, disturbando di quando in quando la cristallizzazione del solfato di calcio per ottenerlo in piccoli cristallini. Dopo un giorno raccolsi alla pompa il precipitato lavandolo diligentemente con alcool a 90, fino ad eliminare completamente il ferro.

Trattando questo solfato di calcio così purificato più volte con acqua acidulata con acido cloridrico, e precipitando le diverse soluzioni con ammoniaca, ottenni dei precipitati tenuissimi che contenevano appena traccie di ferro.

La sostanza attiva era quasi totalmente contenuta nei primi tre precipitati. Nel liquido insieme al solfato di calcio rimaneva disciolto il torio X

che si poteva estrarre insieme al carbonato di calce, precipitando con carbonato ammonico.

Questi risultati mi facevano sperare nella possibilità di estrarre dai sali di torio la sostanza attiva adoperando il metodo seguito per i fanghi. Dalle esperienze fatte in proposito, e non ancora condotte a termine, ho potuto però constatare che il solfato di calcio è solubile in una soluzione di cloruro o nitrato di torio con formazione di sali doppi che ora sto studiando e su cui spero di poter riferire tra non molto tempo. Anche il solfato di bario si comporta come quello di calcio: quello di stronzio avrà naturalmente la stesse proprietà.

Chimica. — *Sulle forme superiori di combinazione dell'argento* (1). Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Berthélot (2), Sulc (3), Mulder (4) e Tanatar (5), cui dobbiamo le ricerche più accurate sulla composizione della sostanza che si deposita all'anodo in forma di cristalli neri, nell'elettrolisi delle soluzioni neutre di nitrato di argento, pure attribuendole formole diverse, concordano nell'ammettere che, appena formata, essa contenga più ossigeno del calcolato per Ag_2O_2 e che, soltanto in seguito, si trasformi, perdendo ossigeno, in Ag_2O_2 lentamente a temperatura ordinaria, più rapidamente a caldo o per ripetuti lavaggi con acqua. Questa riduzione spontanea che subisce il così detto perossido elettrolitico di argento, spiega perchè i primi (6) che ne determinarono la composizione, avendolo lavato ripetutamente con acqua per purificarlo, e seccato a lieve calore, ottennero dei risultati analitici in accordo colla formola Ag_2O_2.

Secondo Berthélot e Tanatar il primo prodotto dell'ossidazione anodica dell'argento sarebbe l'ossido estremamente instabile Ag_2O_3. Prescindendo ora dalle questioni se il composto anodico cristallizzi anidro e se il nitrato di argento che sempre lo accompagna faccia parte della sua molecola o sia, come ritiene Margrete Bose (7) intercluso quale sostanza estranea, è certo che l'ipotesi della formazione primaria di un ossido superiore a Ag_2O_2 è

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della L. Università di Ferrara.

(2) C. R., 90 653 (1880).

(3) Z. f. anorg. Ch., 12 89, 180 (1896), 24 305 (1900).

(4) Rec. trav. chim. Pays.-Bas., 15 1, 236 (1896), 16 57 (1897), 17 129 (1898), 18 91 (1899), 19 115 (1900), 22 385, 405 (1903).

(5) Z. f. anorg. Ch., 28 331 (1901).

(6) Fischer J. prakt. Ch., 33 237 (1844); Mahla, Ann. d. Ch., 82 295 (1852).

(7) Z. f. anorg. Ch., 44 237 (1905).

assai più verosimile di quella di Mulder che attribuisce al composto anodico la formola $3Ag_2O_2.AgNO_5$ ammettendo l'esistenza di un acido pernitrico HNO_5: ipotesi non confortata da nessun altro fatto. Di più Tanatar ha ottenuto per elettrolisi del fluoruro di argento un composto contenente argento, ossigeno e fluoro, in cui il contenuto in ossigeno è superiore al calcolato per Ag_2O_2. Non volendo ammettere l'esistenza di un ossido superiore a Ag_2O_2, bisognerebbe fare la supposizione che parte dell'ossigeno fosse combinato col fluoro: ciò che è assai poco probabile.

A mio parere anche la posizione che occupa l'argento nel sistema periodico fra il rame e l'oro, sta in accordo coll'esistenza di un ossido Ag_2O_3.

Finora vennero messi in rilievo soltanto i rapporti di somiglianza che il rame, l'argento e l'oro presentano nella loro forma inferiore di combinazione MX, mentre è noto che per tutti gli altri elementi le analogie si manifestano essenzialmente nelle forme limiti. Ricordiamo che secondo Mendeleieff [1] e Brauner [2] il rame, l'argento e l'oro, oltre che appartenere al primo gruppo, fanno parte del gruppo ottavo: essi devono quindi presentare nella loro forma limite quel passaggio graduale di proprietà che si riscontra per esempio nei loro eterologhi nickel, palladio e platino e in generale fra termini analoghi in tutti i gruppi. La forma limite dell'oro è AuX_3. Quanto al rame l'esistenza di un ossido Cu_2O_3 affermata da Krüger [3], da Crum [4], da Th. Osborn [5], esclusa da Mawrow [6] con esperienze invero poco convincenti, venne messa fuori di dubbio soltanto recentemente dal dott. Kuzma [7] con ricerche eseguite nel laboratorio del prof. Brauner.

Per l'argento che sta fra il rame e l'oro è prevedibile quindi una forma limite AgX_3 più stabile della CuX_3 e meno dell'AuX_3.

Da quanto precede risulta che lo studio delle forme superiori di combinazione dell'argento ha grande importanza, oltre che per sè stesso, per l'interessante problema di sistematica chimica ch'esso può aiutare a risolvere.

Ho inteso di portare un contributo a tale studio ricercando:

1° se l'ossido che si ottiene per elettrolisi sia un vero perossido, giacchè in tal caso non potrebbe servire per fissare il limite di combinazione dell'argento;

2° se l'argento possa dare composti al massimo in ambiente alcalino a somiglianza del rame e dell'oro.

(1) Lieb. Ann. Suppl., VIII (1872).
(2) Z. f. anorg. Ch., 32 18 (1902).
(3) Pogg. Ann., 62 445 (1844).
(4) Ann. d. Ch. 55 213 (1845).
(5) Am. Journ. [3], 32 333 (1886).
(6) Z. f. anorg. Ch., 33 233 (1900).
(7) Z. f. anorg. Ch., 32 9 (1902).

A. Piccini (1) nella sua classica Memoria: *I perossidi in relazione al sistema periodico degli elementi*, ha insegnato a distinguere gli ossidi che corrispondono all'acqua, dagli ossidi che corrispondono all'acqua ossigenata, cioè dai veri perossidi, mediante la proprietà caratteristica che hanno questi ultimi di ridurre in soluzione acida alcuni composti ricchi di ossigeno — MnO_2, PbO_2, $KMnO_4$ — riducendosi essi stessi.

Allo scopo di riconoscere se il cosidetto perossido d'argento che si ha per via elettrolitica, sia un vero perossido, ho pensato di farlo agire in soluzione acida sul permanganato di potassio, sul biossido di manganese e sul biossido di piombo. Il perossido di argento venne preparato secondo le indicazioni di Sulc (2) per elettrolisi di una soluzione di nitrato di argento. Esso si scioglie, com'è noto, assai facilmente in acido nitrico concentrato, dando un liquido di color nero seppia che viene istantaneamente decolorato dai riducenti e dall'acqua ossigenata.

Se il perossido di argento in soluzione nitrica provocasse la riduzione del permanganato a sale manganoso riducendosi per parte sua a nitrato di argento, si dovrebbe osservare, mescolando le due soluzioni intensamente colorate di perossido e di permanganato, una reciproca decolorazione.

In realtà la soluzione mista di perossido di argento e di permanganato potassico ha un colore bruno rossastro. Che in tale soluzione sia contenuto il permanganato inalterato si può dimostrare in modo molto semplice. Basta aggiungere a goccia a goccia alla soluzione mista una soluzione diluitissima di acqua ossigenata. Siccome questa riduce il perossido di argento prima del permanganato, si arriva a un punto in cui tutto il perossido è stato ridotto e il liquido mostra il colore violetto caratteristico del permanganato.

Si può eseguire un'esperienza analoga, impiegando invece dell'acqua ossigenata una soluzione di nitrato ceroso. Io ho osservato che i sali cerosi vengono ossidati a freddo istantaneamente a cerici dalla soluzione nitrica di perossido di argento, mentre è noto (3) che il permanganato a freddo li ossida con estrema lentezza. La soluzione nitrica di perossido di argento e di permanganato per aggiunta di un sale ceroso diventa violetta.

Anche il biossido di manganese e il biossido di piombo non agiscono come riducenti sulla soluzione nitrica di perossido di argento.

Se si accetta come esatta la regola di Piccini, non si può dunque considerare il composto che si forma all'anodo nell'elettrolisi del nitrato di argento come un vero perossido ma come un ossido superiore di argento, e si deve ritenere come erronea la supposizione di Mulder (4) che per tratta-

(1) Z. f. anorg. Ch., 12 169 (1896); L'Orosi, 19 37 (1896).
(2) Z. f. anorg. Ch., 24 309 (1900).
(3) Von Knorre, Z. angew. Ch., 1897, 685.
(4) Rec. trav. Ch. Pays-Bas, 17 129-176 (1898).

mento del cosidetto perossido di argento con acqua si formi dell'acqua ossigenata.

Nel suo comportamento coll'acqua ossigenata e coi sali cerosi, l'ossido superiore di argento presenta molta analogia col biossido di piombo. È noto infatti che i sali cerosi vengono ossidati a cerici per azione del PbO_2 e acido nitrico a freddo (1) e che il PbO_2 im ambiente acido viene istantaneamente ridotto dall'acqua ossigenata.. Inoltre Küster e Steinwehr (2) ritengono che l'ossido elettrolitico di argento si formi per un processo perfettamente analogo a quello secondo il quale negli accumulatori si forma il biossido di piombo, e recentemente Margrete Bose (3) ha riconosciuto che l'ossido elettrolitico di argento presenta conducibilità metallica come il biossido di piombo e il biossido di manganese.

I tentativi per ottenere dei composti di argento al massimo in soluzione alcalina non mi hanno ancora condotto ad un risultato definitivo: voglio tuttavia riferire alcune esperienze che mi sembrano presentare qualche interesse.

Elettrolizzando una soluzione satura a freddo di $KHCO_3$ con elettrodi di argento, ho osservato che l'anodo si copre dapprima di uno strato di ossido nero che a poco a poco passa in soluzione colorando il liquido anodico in rosso-bruno. L'esperienza venne eseguita in un piccolo bicchiere diviso in due scompartimenti da un cartone di amianto che fungeva da setto poroso. Gli elettrodi erano costituiti da due strette lamine di argento puro. La corrente era fornita da una pila Gülcher di cinquanta elementi. Togliendo la corrente, il liquido anodico abbandonato a sè, si scolorava a poco a poco. La decolorazione si produceva istantaneamente per aggiunta o di ammoniaca o di acqua ossigenata o di qualunque sostanza riduttrice.

Molto facilmente si può ottenere una soluzione avente gli stessi caratteri della precedente ossidando a caldo con persolfato di potassio una soluzione di carbonato di argento in bicarbonato potassico. Si prepara una soluzione satura a 80° di bicarbonato potassico e vi si fa cadere a goccia a goccia una soluzione molto diluita di nitrato di argento, finchè il precipitato di carbonato di argento non si scioglie più nell'eccesso di bicarbonato alcalino. Si aggiunge allora una soluzione concentrata di persolfato potassico e si scalda: il liquido assume un'intensa colorazione rosso-granato.

Se invece del bicarbonato potassico s'impiega il pirofosfato sodico, si ottiene una soluzione molto più stabile della precedente perchè si può conservare (al riparo della luce) per parecchie settimane. 25 gr. di pirofosfato sodico sciolti in 100 gr. di acqua possono mantenere in soluzione circa un decigrammo di nitrato di argento. Aggiungendo a questa soluzione alcalina

(1) Von Knorre, Ber., 33 1924 (1900).
(2) Zeitschr. f. Elektr., 4 451 (1898).
(3) Z. f. anorg. Ch., 44 264 (1905).

di argento 100 cc. di una soluzione al 10 % di persolfato potassico si ha tosto una colorazione rossastra che a caldo aumenta rapidamente e in pochi minuti si cambia in un bel colore rosso-granato.

Tutte queste soluzioni rosse di argento vengono decolorate per aggiunta di ammoniaca, di acqua ossigenata, di sali d'idrazina e d'idrossilamina.

Che in esse l'argento sia contenuto in una forma di combinazione superiore alla MX, è dimostrato dal loro comportamento coi sali ferrosi e cobaltosi. Facendo agire sopra una soluzione alcalina di argento, ossidata con persolfato di potassio, una soluzione di solfato ferroso in bicarbonato o in pirofosfato alcalino, il liquido argentico viene istantaneamente decolorato, poi si separa argento metallico. Se invece del solfato ferroso si impiega solfato cobaltoso, le soluzioni argentiche da rosse diventano verdi perchè si forma del bicarbonato o del pirofosfato cobaltico. L'ossidazione del cobalto è certamente dovuta all'argento che passa da una forma polivalente alla forma comune monovalente, e non può venire attribuita al persolfato in eccesso presente nella soluzione argentica perchè ho constatato che il persolfato solo, a freddo e alla luce diffusa, non ossida i sali cobaltosi sciolti in bicarbonati o pirofosfati alcalini che molto lentamente.

È degno di nota questo altro fatto. Se si fa agire il persolfato sopra soluzioni di carbonato o di pirofosfato di argento in bicarbonati o pirofosfati alcalini, che siano torbide perchè contenenti in sospensione un po' di carbonato o di pirofosfato di argento, si ottengono ugualmente delle soluzioni rosse limpidissime. Dunque il sale di argento in causa dell'ossidazione diventa più solubile nel sale alcalino. Un fatto perfettamente analogo venne osservato da A. Job [1] per il cobalto. Il carbonato cobaltico è circa dieci volte più solubile del carbonato cobaltoso nei bicarbonati alcalini. Siccome nelle soluzioni dei sali di metalli pesanti in bicarbonati [2] e pirofosfati alcalini, verosimilmente i metalli entrano a far parte di anioni complessi, si può spiegare l'aumentata solubilità dei sali di argento dopo l'ossidazione, ammettendo che nella forma superiore l'argento abbia maggior tendenza a dare origine a complessi, ciò che del resto è previsto dalla teoria di Abegg e Bodländer sull'elettro-affinità [3] e si verifica per vari altri metalli, p. es. per il rame e per l'oro.

Quale forma di combinazione raggiunga l'argento nei liquidi rossi su descritti, per ora non è possibile dire. Forse potrà portare luce sull'argomento lo studio del composto nero insolubile che si ottiene trattando a freddo il nitrato di argento con persolfato potassico e sulla composizione del quale vennero emesse le opinioni più disparate [4].

[1] Ann. chim phys. [7], 20 205 (1900).

[2] R. Luther e B. Krsnjavi, Z. f. anorg. Ch., 46 170 (1905).

[3] Z. f. anorg. Ch., 20 482 (1899).

[4] H. Marshall, Journ. chem. Soc., 59 771 (1891); R. Namias, L'Orosi, 23 218 (1900); N. Tarugi, Gazz. Ch., 32, II, 390 (1902).

Mineralogia. — *Appunti sulla scheelite di Traversella.* Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio G. Strüver.

Chimica. — *Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido adipico* (1). Nota del dott. B. Lino Vanzetti, presentata dal Socio G. Koerner.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Su alcuni minerali del granito di S. Fedelino (Lago di Como)* (1). Nota di Emilio Repossi, presentata dal Socio G. Strüver.

Già da qualche anno sto occupandomi del rilievo geologico e petrografico delle valli Codera e dei Ratti, poste a nord del lago di Como e comprese tra la valle del Masino ad oriente e quella della Mera, sotto Chiavenna, ad occidente, e ciò col particolare scopo di delimitare e studiare compiutamente la massa granitica detta di Riva di Novate o di S. Fedelino.

Le mie osservazioni però, data l'estensione e la poca praticabilità della regione considerata, sono lungi dal potersi dir complete, e richiederanno ancora qualche tempo, prima che i risultati loro meritino di essere resi noti.

In considerazione di ciò, e perchè trattasi di argomento puramente mineralogico, e quindi non strettamente legato allo scopo finale del mio studio, credo opportuno dare fin d'ora notizia di alcuni minerali, forse non privi d'interesse, che rinvenni la scorsa estate in talune piccole litoclasi della massa granitica del monte Avedè in vicinanza di Novate, riservandomi, se sarà il caso, di tornare sull'argomento a lavoro compiuto.

Risalendo la valle Codera pel sentiero che segue il fianco destro della valle, superato il Dosso ed oltrepassate le alpi di Avedè, si attraversa un erto canalone, scendente dal monte Avedè, ingombro di massi granitici, che frequentemente si staccano dalle soprastanti pendici. In uno di questi massi, recentissimamente caduto, potei constatare la presenza, eccezionalmente rara nel granito di S. Fedelino, di alcune sottili spaccature parallele, le cui pianeggianti pareti erano totalmente ricoperte di minuti cristalli, degni di

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

qualche attenzione per la varietà delle specie minerali rappresentate e pre la freschezza e nitidezza delle facce.

Le specie minerali, la cui esistenza fu constatata, sono: il *quarzo*, la *calcite*, la *titanite*, l'*epidoto*, la *prehnite*, la *muscovite*, la *clorite* e la *laumontite*.

Il *quarzo* predomina largamente sugli altri minerali. I suoi cristalli, limpidi ed incolori, impiantati direttamente sulle pareti delle litoclasi granitiche, sono allungati secondo l'asse verticale e presentano in questa direzione una dimensione massima di 6-7 millimetri con una media di 3-4 mm. L'abito cristallino è caratterizzato dalla presenza costante del prisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$; accompagnato sempre dai romboedri $\}100\{$, $\{22\bar{1}\}$, le cui facce sono ordinariamente assai limitate per lo sviluppo dei due romboedri acuti diretti $\{13\ \bar{2}\ \bar{2}\}$, $\{3\bar{1}\bar{1}\}$,

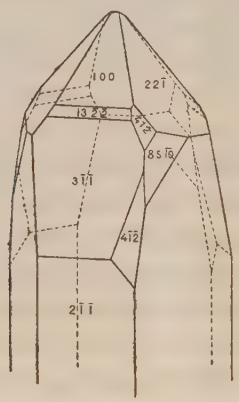

Fig. 1.

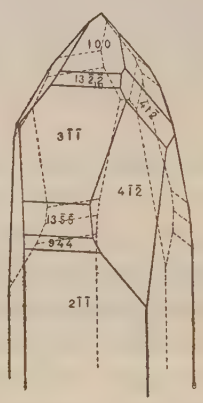

Fig. 2.

della bipiramide $\{41\bar{2}\{$ e dei due trapezoedri $\{4\bar{1}2\}$, $\{8\ 5\ \bar{1}0\}$. Queste ultime due forme, di solito molto sviluppate e frequentemente associate sul medesimo individuo (vedi fig. 1, che riproduce, ridotto quasi a modello, uno dei migliori cristalli), contribuiscono insieme coi romboedri acuti ad impartire ai cristalli una caratteristica forma acuminata, e costituiscono con la loro associazione la particolarità cristallograficamente più notevole del quarzo del S. Fedelino. E difatti la combinazione di due trapezoedri corrispondenti diretto ed inverso è nel quarzo, almeno per quanto so, un fatto molto raro. Le facce appartenenti a queste due forme sono sempre nettamente distinte anche pel loro aspetto: le facce del trapezoedro diretto $\{4\bar{1}2\}$, che più frequentemente di quelle dell'inverso si trovano anche isolate (vedi fig. 2), sono infatti sempre perfettamente piane e lucenti, tanto da prestarsi in modo egregio alla misura goniometrica, mentre invece le facce del trapezoedro $\}8\ 5\ \bar{1}0\{$, costantemente striate e rigate parallelamente allo spigolo $[8\ 5\ \bar{1}0\ .\ 41\bar{2}]$, solo

in pochi casi forniscono un'immagine riconoscibile e determinabile in modo sicuro.

Pure striate sono sempre le facce della bipiramide trigonale e la disposizione di queste strie, parallele allo spigolo [41$\bar{2}$. 100], insieme all'osservazione delle figure di corrosione, ottenute mediante il solito attacco con acido fluoridrico, servì alla orientazione delle forme cristalline.

I romboedri acuti rappresentati da facce abbastanza ampie e sicuramente distinguibili, sono tutti diretti: oltre i due già ricordati, sono pure discretamente frequenti quelli di simbolo {13 $\bar{5}$ $\bar{5}$} e {9$\bar{4}\bar{4}$}: più rari {11 $\bar{4}$ $\bar{4}$} e {7$\bar{3}\bar{3}$}, il quale ultimo trovai una volta sola, ma con una faccia ampia e brillante.

Oltre i cristalli semplici, non son rari nel materiale raccolto anche i soliti geminati di compenetrazione completa, svelati, oltre che dalle figure di corrosione, dall'esistenza su di essi di facce di bipiramide e di trapezoedro sopra vertici consecutivi.

Le forme semplici osservate sono dunque le seguenti:

{2$\bar{1}\bar{1}$} , {100} , {22$\bar{1}$} , {13 $\bar{2}$ $\bar{2}$} , {3$\bar{1}\bar{1}$} , {11 $\bar{4}$ $\bar{4}$}
{13 $\bar{5}$ $\bar{5}$} , {7$\bar{3}\bar{3}$} , {9 $\bar{4}$ $\bar{4}$} , {41$\bar{2}$} , {4$\bar{1}\bar{2}$} , {8 5 $\bar{1}\bar{0}$} .

Nella tabella qui riportata i risultati della misura sono posti a confronto coi dati del calcolo, ai quali si giunge in base al valore (100) . (22$\bar{1}$) = 46°15′52″ dato dal Kuppfer ed accettato dall'Hintze (1):

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
2$\bar{1}\bar{1}$:100	15	38°. 4′ — 38°.18′	38°.13	38°.13°
100:$\bar{2}$1$\bar{2}$	14	103. 30 — 103. 45	103. 35	103. 34
100:22$\bar{1}$	19	46. 6 — 46. 26	46. 18	46. 16
13 $\bar{2}$ $\bar{2}$:100	6	12. 36 — 13. 14	12. 50	12. 56
3$\bar{1}\bar{1}$:100	11	26. 56 — 27. 22	27. 6	27. 5
11 $\bar{4}$ $\bar{4}$:100	2	29. 13 — 29. 14	29. 13 $\frac{1}{2}$	29. 16
13 $\bar{5}$ $\bar{5}$:100	10	30. 28 — 31. 5	30. 45	30. 44 $\frac{1}{2}$
7$\bar{3}\bar{3}$:100	1	— —	33. 41	33. 43
9$\bar{4}\bar{4}$:100	5	34. 33 — 35. 7	34. 51	34. 45
41$\bar{2}$:100	23	28. 45 — 29. 8	28. 54	28. 54
41$\bar{2}$:2$\bar{1}\bar{1}$	12	37. 43 — 37. 59	37. 57	37. 58
41$\bar{2}$:4$\bar{1}\bar{2}$	11	25. 43 — 26. 4	25. 53	25. 57
4$\bar{1}\bar{2}$:2$\bar{1}\bar{1}$	7	11. 48 — 12. 18	12. 5	12. 1
4$\bar{1}\bar{2}$:22$\bar{1}$	6	54. 30 — 55. 3	54. 47	54. 51
8 5 $\bar{1}\bar{0}$:41$\bar{2}$	4	25. 35 — 26. 11	25. 52	25. 57
8 5 $\bar{1}\bar{0}$:1$\bar{1}\bar{2}$	3	11 47 — 12. 11	12. 3	12. 1
8 5 $\bar{1}\bar{0}$:100	3	54. 40 — 55. 1	54. 50	34. 51

(1) C. Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, vol. I, pag. 1266.

La *calcite*, poco abbondante, si presenta in tavolette ed in lamelle a contorno esagonale e del diametro massimo di 6-7 mm., adagiate sui cristallini di quarzo. L'abito lamellare è dato dal prevalente sviluppo della base, la quale trovasi in combinazione con un romboedro, il cui simbolo non si potè determinare in causa della estrema imperfezione delle sue facce, che, come quelle della base, sono di solito profondamente corrose.

Le lamelle calcitiche sono incolore ed abbastanza limpide e trasparenti, tanto da dare a luce convergente delle bellissime immagini assiali.

Pure adagiati fra i cristalli di quarzo, e specialmente raggruppati nei punti ove al quarzo si accompagnano anche altri minerali, si notano non infrequentemente nelle litoclasi osservate minuti cristalli di *titanite*. Una viva lucentezza adamantina ed un bel colore azzurro-lavanda, invero poco frequente in questa specie minerale, li rende facilmente manifesti, non ostante che siano tanto piccoli da raggiungere di rado il mezzo millimetro nella loro massima dimensione.

Le forme osservate, il cui simbolo potè essere stabilito con un discreto numero di soddisfacenti misure, sono le seguenti:

$$\{100\}\ ,\ \{001\}\ ,\ \{102\}\ ,\ \{021\}\ ,\ \{111\}\ ,\ \{11\bar{1}\}\ .$$

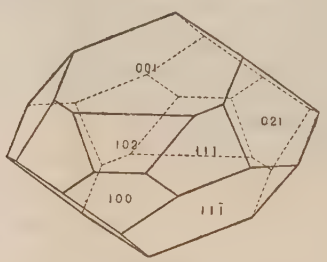

Fig. 3.

L'abito cristallino, di cui si può dare un'idea la fig. 3, è molto costante ed è caratterizzato dallo sviluppo prevalente della $\{11\bar{1}\}$, della $\{021\}$ e specie della base $\{001\}$. Le facce delle rimanenti forme, di rado molto sviluppate, si distinguono però per essere così piane e lucenti da dare ottime immagini alla osservazione goniometrica, nonostante la loro estrema piccolezza. Le facce di $\{11\bar{1}\}$ sono invece costantemente striate parallelamente allo spigolo $[111\ .\ 11\bar{1}]$; le facce di $\{021\}$ di solito non sono brillanti e quelle di $\{001\}$ sono sempre ondulate e bruttissime, tanto che poche volte e le une e le altre dànno al goniometro immagini di cui si possa ragionevolmente tener conto.

La $\{102\}$ è non di rado sostituita da facce vicinali rispondenti ad un simbolo molto più complesso: per un gruppo di tali facce, che hanno dato misure in soddisfacente accordo tra loro, ho potuto stabilire il simbolo $\}5\ 0\ 11\{$.

Nella tabella che segue i risultati dell'osservazione sono posti a confronto coi dati del calcolo: l'orientazione scelta è quella di Des Cloizeaux [1] e le costanti adottate:

$$a : b : c = 0.75467 : 1 : 0.85429$$
$$\beta = 60°.17'$$

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
100:001	4	59°.44′ — 60°.51′	60°.18′	60°.17′
100:102	6	39. 31 — 39. 47	39. 40	39. 17
100:5 0 12	7	40. 31 — 41. 8	40. 40	40. 41
001:102	6	20. 1 — 21. 3	20. 40	21. 00
001:5 0 12	4	19. 3 — 19. 49	19. 33	19. 36
100:111	11	34. 46 — 35. 25	35. 6	35. 3 ½
100:11$\bar{1}$	10	60. 30 — 61. 15	60. 52	60. 53
100:$\bar{1}$1$\bar{1}$	1	— —	145. 10	144. 56 ½
001:111	3	37. 48 — 38. 39	38. 18	38. 16
001:$\bar{1}$11	6	70. 6 — 70. 49	70. 28	70. 23
100:021	1	— —	73. 54	73. 55
111:$\bar{1}$11	8	83. 23 — 84. 18	83. 50	84. 3 ½
111:11$\bar{1}$	9	71. 8 — 71. 27	71. 25	71. 20
$\bar{1}$11:$\bar{1}\bar{1}$1	4	68. 59 — 69. 19	69. 8	69. 9
111:1$\bar{1}$1	3	44. 3 — 44. 15	44. 10	43. 49
$\bar{1}$11:$\bar{1}$1$\bar{1}$	4	110. 41 — 111. 34	111. 2	110. 51
111:102	4	24. 21 — 24. 46	24. 33	24. 29
111:5 0 12	4	25. 6 — 25. 22	25. 16	25. 7
111:021	4	41. 40 — 42. 4	41. 52	41. 34

In un piccolo cristallino con {102} abbastanza sviluppata ho potuto verificare che il piano degli assi ottici coincide col piano di simmetria e che appunto dalle facce di {102} emerge quasi normalmente la bisettrice acuta positiva.

L'*epidoto* si presenta in cristallini aghiformi riuniti in fasci e ciuffetti. Il colore è verde-bruno con forte pleocroismo dal verde-bruno al bruno. Questa specie minerale è scarsissimamente rappresentata.

Abbondante nelle litoclasi del granito di S. Fedelino è invece la *prehnite*, di color bianchiccio o giallognolo chiaro, quasi limpida, che co'suoi aggregati a ventaglio di tavolette rombiche forma frequentemente delle croste cristalline sopra gli altri minerali e specie sul quarzo. L'abito tabulare de'suoi indi-

[1] *Manuel de minéralogie*, Paris 1862, vol. I, pag. 145.

vidui cristallini è dato dal predominante sviluppo della {001}, alla quale si associano sempre la {100} ed il prisma {110}. L'aggruppamento quasi costante dei cristalli, che non arrivano al millimetro nella loro massima dimensione, e la poca perfezione delle facce, rendono difficile la misura goniometrica dei pochi angoli risultanti da una così semplice combinazione cristallina. Alcune misure hanno tuttavia fornito i risultati, che nello specchietto che segue sono posti a confronto coi dati del calcolo, ai quali si giunge con le costanti di Beutell (1), accettate anche dall' Hintze:

$$a : b : c = 0.8420 : 1 : 1.1272$$

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
100:110	4	39°.19′ — 40°.32′	40°. 5′	40°. 6′
110:1$\bar{1}$0	6	79. 51 — 80. 45	80. 31	80. 12
100:001	2	89. 49 — 89. 55	89. 52	90. 00

La trasparenza delle lamelle prehnitiche permise qualche ricerca ottica, che, sebbene limitata dalla grande piccolezza degli individui cristallini,

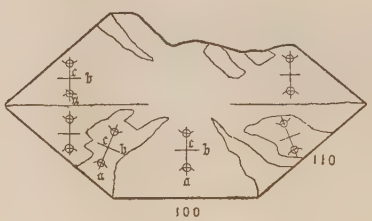

Fig. 4.

dimostrò nella prehnite del S. Fedelino una costante struttura anomala. Nella fig. 4 è riprodotta una delle migliori laminette studiate: non ho creduto opportuno rappresentare con una figura schematica la struttura dei cristallini di S. Fedelino, perchè, quantunque risponda in tutti ad un identico disegno generale, pur tuttavia varia molto in essi la forma delle plaghe in cui risultano divisi ed il valore dell'angolo che in queste plaghe il piano degli assi ottici fa con {100}.

Come si vede dalla figura, le tavolette di prehnite sono divise quasi completamente ed in modo abbastanza regolare in due metà, parallelamente ad (100). Il piano degli assi ottici è in esse pressochè coincidente, presentando una deviazione massima di 1° o 2°, ed è sensibilmente normale a {100};

(1) Vedi C. Hintze, op. cit., vol. II, pag. 470.

solo in rasi casi esso piano s'allontana di 4°-5° da questa direzione. In questi due individui principali sono poi inserite quasi costantemente quattro plaghe più o meno estese, di solito cuneiformi, non di rado suddivise in plaghe minori a contorno molto vario, ed aventi per base le facce di {110}. In queste plaghe, come mostra la figura, il piano degli assi ottici, lungi dal coincidere con (010), come avviene nelle prehniti normali, forma con questa direzione un angolo, variabile nei varî cristalli e nelle varie plaghe dello stesso cristallo da 14°-15° fin verso i 30°, nello stesso senso in settori opposti ed in senso contrario nei settori successivi.

Talvolta si nota anche un accenno alla struttura zonale, rivelata da una leggera differenza nel valore degli angoli d'estinzione.

Il valore dell'angolo degli assi ottici non si potè determinare per la piccolezza dei cristalli osservati, ma è sempre grande. La bisettrice acuta, normale a (001), è sempre positiva.

Della prehnite del granito di S. Fedelino fu determinato anche il peso specifico col metodo delle soluzioni pesanti (Thoulet) mediante la bilancia di Westphal, e si trovò uguale a 2.88, valore che corrisponde esattamente a quello dato in media dagli autori.

La *clorite*, pulverulenta ed assai somigliante a quella delle litoclasi del Gottardo, e minute e non abbondanti lamelle micacee, che mostrano i caratteri della *muscovite*, non si prestano ad osservazioni particolari.

Della *laumontite*, che si presenta in sottili prismetti di 1-2 mm. di lunghezza, di color bianco, impiantati sugli altri minerali, ho potuto invece prendere qualche misura goniometrica, che, sebbene molto imperfetta per la striatura ed il cattivo stato delle facce, mi permise di stabilire con sufficiente esattezza la presenza delle due forme

$$\{110\}, \{\bar{2}01\}.$$

I valori ottenuti nella misura sono qui posti a confronto coi dati del calcolo, dedotti in base alle costanti di Miller, accettate dall' Hintze (1):

$$a : b : c = 1.1451 : 1 : 0.5906$$
$$\beta = 68°.46\tfrac{1}{4}'$$

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
110:1$\bar{1}$0	3	93°.36 — 93°.50′	93°.43′	93°.44′
110:20$\bar{1}$	2	65. 42 — 67. 6	66. 22	66. 30
110:$\bar{2}$01	5	112. 44 — 114. 1	113. 21	113. 30

(1) C. Hintze, op. cit., vol. II, pag. 1670.

L'estinzione, misurata su (110), ha dato un valore medio di 51° nell'angolo acuto di (110) . ($\bar{2}$01).

Volendo infine, a mo' di conclusione, fare dei confronti fra i minerali del granito di S. Fedelino e quelli che in condizioni analoghe si trovano in località già note, si può facilmente rilevare come i minerali da me studiati e per la natura loro e per l'associazione delle specie, fra le quali è notevole l'assenza dei felspati, somiglino piuttosto a quelli che tappezzano le litoclasi dei gneiss alpini, che a quelli delle druse pegmatitiche dei nostri graniti, notissimo tra i quali quello di Baveno.

Bacteriologia agraria. — *Sopra la forma italiana del Nitrosomonas europaea Win.* (1) Nota del dott. R. Perotti, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Per i classici lavori di S. Winogradsky e degli altri che a lui seguirono, quali: Omelianski, Rullmann, Fraenkel, Gärtner, Boullanger, Massol, ecc., si venne ad accertare l'esistenza del genere *Nitrosomonas* Win. con forme più o meno diverse a seconda dei luoghi, per taluni aventi valore di specie, per altri di semplici varietà, che tuttavia possono riunirsi in due gruppi caratterizzati soprattutto dai due tipi principali di batteriacee: quello bacillare e quello cocciforme. Nei paesi dell'Europa occidentale si trovò dominare una forma a corti bacteri, nei paesi dell'Europa orientale e nella bassa Asia si trovò diffusa la forma a cocchi; e dalla descrizione e dalle figure che i vari autori dettero di esse, apparisce evidente, marcata, la diversità dei due tipi.

Quando nel decorso anno intrapresi lo studio della microflora nitrosante delle nostre regioni, potei segnalare la presenza, qui in Roma, di una varietà di *Nitrosomonas* la quale mi fornì occasione d'instituire un confronto con quelle già note e di stabilire conseguentemente come essa appartenesse al tipo cocciforme e presentasse alcuni punti di analogia con la forma, che per essere stata rinvenuta in Giava, fu denominata dal Winogradsky *asiatica* (2).

Un tale fatto evidentemente destava un certo interesse per il quale io intesi di procedere ad una più vasta ricognizione della microflora nitrosante dei vari terreni italiani allo scopo di poter fissare i rapporti di distribuzione della varietà isolata del terreno di Roma con quelle rinvenute altrove. Ed intrapresi l'esame dei numerosi campioni di terreno agrario, di varia pro-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Bacteriologia agraria annesso alla R. Stazione di Patologia vegetale, di Roma.

(2) Dott. R. Perotti, *Di una forma nitrosante isolata da un terreno di Roma*, Ann. Bot., vol. III, fasc. 2, pag. 43.

venienza, di natura differente, che potei ottenere per gentile e premuroso invio di molti direttori d'istituti scientifici e d'importanti aziende agrarie.

Riferisco in questa Nota gli ottenuti risultati con i quali posso venire a stabilire che in tutti i terreni d'Italia da me studiati è presente la varietà cocciforme del nitrosomonade, senza, peraltro, poter con sicurezza escludere, specialmente nelle terre dell'Italia settentrionale, la presenza della forma bacillare.

I campioni di terreno che sottoposi ad esame appartenevano a differenti località scelte in punti lontani e disparati della penisola e delle isole. Le varie provenienze di essi furono:

Avellino: località « Cappuccini ». Si esaminò il terreno naturale, umoso, con castagno, quercia e vegetazione erbacea spontanea ed il terreno vignato.

Caltagirone: podere « Mazzivecchi ».

Cerignola: località « Pavoni », appezzamento « Conca d'Oro » e località « Posticciola » appezzamento medesimo, proprietà dell'on. Pavoncelli.

Fabriano: podere del conte Cerbelli in località « Troila » e dell'on. Miliani in località « Cancelli ».

Messina: podere in contrada s. Placido, della scuola pratica di agricoltura.

Perugia: orto dell'istituto superiore agrario e campo sperimentale dal medesimo dipendente.

Porto Maurizio: territorio di Vallecrosia.

Rieti: Campo reatino.

Scafati: R. istituto sperimentale per la coltivazione dei tabacchi. Fu esaminato tanto il terreno coltivato a mais, quanto quello coltivato a tabacco.

Torino: campo sperimentale della R. stazione agraria nella frazione « Lingotto ».

Nella scelta di essi volli tenere in particolar modo presente la varia costituzione fisico-chimica dei terreni e procurai quindi che da questo punto di vista i campioni fossero per quanto possibile differenti. Fra i vari campioni sperimentati vi erano difatti rappresentate quasi tutte le principali composizioni possibili; dai terreni magri, sabbiosi sciolti, s'andava a quelli argillosi, compatti, umosi (1).

La preparazione e l'invio dei campioni furono eseguiti in modo che si avessero le necessarie garanzie. Secondo le istruzioni che vennero impartite alle persone destinate a raccoglierli, i prelevamenti si fecero dal soprasuolo e dalla mescolanza di più di essi appartenenti ad un medesimo appezzamento di terreno si ottenne un campione medio ch'era quello inviato al laboratorio.

(1) Per alcune notizie riguardanti la composizione fisico-chimica dei campioni di terreno, v. questi Rendiconti, vol. XV, 1° sem. 1906, fasc. 5, la mia Nota: *Distribuzione dell'Azotobacterio in Italia.*

Per eseguire il trasporto nel miglior modo possibile, s'impiegarono tubicini di vetro bene puliti e previamente sterilizzati a secco. Essi riempironsi sul luogo stesso con la terra prelevata chiudendoli subito con tappo di sughero a tenuta, così che non avesse potuto scemare o perdersi durante il viaggio il naturale contenuto in acqua del campione: indi si avvolsero con carta nera e si spedirono per mezzo postale.

Con ciascuno dei quindici campioni suddetti, man mano che pervenivano al laboratorio, eseguii il procedimento qui appresso descritto, che va dalle culture di presa ai passaggi selezionati proposti dall'Omelianski ed all'isolamento delle forme con la modificazione del metodo da me stesso proposta.

In Erlenmeyer di 250 cm.^{3} di contenuto, introdussi una certa quantità di scorie e gr. 0,5 di carbonato di magnesio in polvere, e, dopo sterilizzazione nella stufa ad aria, aggiunsi 50 cm.^{3} del liquido selezionante, sterile, d'Omelianski:

solfato ammonico	2,0
cloruro sodico	2,0
fosfato potassico	1,0
solfato di magnesio.	0,5
solfato ferroso	0,4
acqua distillata	1000,0

L'inoculazione di ciascun recipiente veniva fatta con grammi 0,5 del terreno da sottoporsi ad esame e le culture erano mantenute in termostato a 28° C.

Quando nei liquidi di cultura, trattati con il reattivo iodo-amidico del Tromsdorff, appariva molto forte la reazione dell'acido nitroso, ciò che in media s'otteneva dopo trascorsi circa 10-12 giorni dall'innesto, si procedeva ai passaggi selezionanti consigliati dall'Omelianski.

In provette, piuttosto larghe, preparate con scorie, carbonato di magnesio e soluzione di Omelianski nel modo di sopra detto e nelle già determinate proporzioni, si eseguiva l'innesto con una sola ansa di materiale infettante, dopo di che i tubicini si ponevano in termostato a 28° C. adagiati quasi orizzontalmente. Regolandomi anche qui con la reazione di Tromsdorff, coglieva il momento più opportuno per eseguire nella stessa maniera il successivo passaggio. I passaggi selezionanti che si susseguirono a distanze sempre più abbreviate di tempo, per la diminuzione del cosidetto periodo d'*incubazione*, dovuta all'aumentante virulenza del microrganismo, furono, per ciascun campione di terreno, tre.

La modificazione che introdussi nel metodo d'isolamento dei microrganismi della nitrificazione (1), eliminando la poco agevole preparazione del

(1) V. questi Rend., vol. XIV, 1° sem. 1905, fasc. 4°, pag. 228.

substrato solido all'acido silicico del Winogradsky, mi riuscì di grande aiuto nel presente studio, dove per la formazione delle colonie mi valsi esclusivamente dei blocchi di carbonato di magnesio, tagliati a parallelepipedi ed introdotti in provette, sterilizzati a secco, cui veniva aggiunta una certa quantità del liquido nutritivo a base di solfato ammoniaco, pur esso sterile.

La semina fu eseguita con una piccola quantità del materiale del terzo passaggio selezionante e portò, dopo 15-20 giorni di cultura in termostato a 28° C., alla formazione delle piccole cavità contenenti la sostanza giallo-sporca costituita in massima parte da materiale bacterico puro.

Con questo eseguii passaggi nella soluzione di Omelianski contenente frammenti di scorie e carbonato di magnesio, ottenendo costantemente dal liquido la reazione dell'acido nitroso. Come mezzo diagnostico per i microrganismi mi valsi anche dei risultati delle semine in brodo che riuscirono assolutamente negativi per qualsiasi sviluppo di forme.

Il risultato, dell'esame dei campioni di terreno sottoposti ai sopradescritti trattamenti, fu quello di ottenere costantemente all' isolamento di forme nitrosanti uguali a quella isolata dal terreno della stazione agraria sperimentale di Roma, segnalata anche nel terreno della villa Venosa di Albano e della quale già detti un'accurata descrizione. Piccole oscillazioni nelle dimensioni potei notare esaminando la forma predominante nelle culture brute. I microrganismi aventi le minori dimensioni si notarono specialmente nei campioni di terreno provenienti da Avellino e da Porto Maurizio. Tuttavia qualsiasi differenza tendeva a scomparire man mano che si procedeva nei passaggi selezionanti, nei quali tutti i microrganismi venivano a trovarsi nelle identiche condizioni culturali, come nei terreni naturali non potevano verificarsi. La conclusione quindi che io sono in grado di trarre dalle mie ricerche, è quella di stabilire che sulla penisola italiana, con una rimarchevole costanza, è largamente diffusa una forma di *Nitrosomonas* con uguali caratteri morfologici.

Se dessa sia l'unica ivi presente, con certezza non si può asserire.

Stando alle osservazioni del Winogradsky, risulterebbe che di una grande estensione di superficie sarebbe propria una determinata forma con caratteri costanti e che da uno stesso campione di terreno non fu mai possibile isolare più d'una varietà. Si accordano con questo modo di vedere anche i miei risultati, per i quali in nessun caso mi fu dato d'ottenere l'isolamento di due differenti varietà da uno stesso campione e neppure da due campioni differenti dei terreni esaminati della nostra penisola. Tuttavia l'aver constatato nelle culture brute del campione proveniente da Torino, oltre alle solite pseudomonadi, la presenza di numerose forme allungate, mi impone una certa riserva su la constatazione di questo fatto.

Se poi tra le caratteristiche morfologiche della forma da me isolata nei terreni italiani e quelle delle forme dell'*Europa occidentale* ed *asiatica* Win., corrano divergenze tali che autorizzino gli scienziati ad attribuire alle varie forme valore di specie differenti o solamente di varietà, è una questione che lascio impregiudicata, poichè sarebbe necessario che gli studiosi d'oltre Alpe, valendosi anche di questi miei modesti contributi, tornassero con altre ricerche sull'argomento. Per ora a me basta d'aver posto sufficientemente in luce, se non l'unica, almeno la più diffusa forma di microrganismo nitrosante dei terreni italiani.

Sistematicamente la forma si deve far rientrare nella specie *Pseudomonas europaea* del Migula o *Nitrosomonas europaea* del Winogradsky, e mi limito ad attribuire ad essa non altro valore che quello di una *varietà* che, come in una precedente pubblicazione feci notare (1), presenterebbe degli accenni di passaggio tra la varietà europea dell'ovest e quella asiatica. Ad ogni modo, per distinguerla propongo di denominarla *Var. italiana*, non nel senso ch'essa sia limitata alla nostra penisola, ma perchè essa ivi fu dapprima isolata e descritta.

La breve diagnosi ne sarebbe la seguente:

« *Piccoli cocchi di 0,6-0,8 μ di diametro, con accenni di passaggio a forma di bacteri: presentano uno stadio di monade, nel quale sono muniti di un ciglio di quasi uguale lunghezza con cui isolati od in piccoli gruppi si muovono lentamente ed a sbalzi. Non si sviluppano in mezzi contenenti sostanza organica; producono acido nitroso dai sali ammoniacali* ».

PRESENTAZIONE DI MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. Carrara. *Elettrochimica delle soluzioni non acquose.* Presentata dal Corrispondente R. Nasini.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Volterra, a nome anche del Corrispondente V. Reina, relatore, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi delle Memorie, del lavoro del dott. F. de Helguero, intitolato: *Per la risoluzione delle curve dimorfiche.*

Il Corrispondente Sella, relatore, a nome anche del Socio Blaserna, legge una Relazione sul lavoro del dott. G. Zambiasi, intitolata: *Verifica*

(1) V. op. cit., in Ann. Bot., vol. III. fasc. 2, pag. 56.

dei coristi normali dell'Ufficio centrale italiano per il corista uniforme, concludendo per la inserzione del lavoro stesso nei volumi delle Memorie.

Le conclusioni delle due Commissioni esaminatrici, messe partitamente ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Veronese, Bassani, Pascal, Rajna, Klein, Sorauer, dal dott. Loew e dalla Commissione Reale svedese per la misura di un arco di meridiano allo Spitzberg.

Il Presidente Blaserna fa omaggio, a nome dell'autore senatore Marazio, della pubblicazione: *Il partito socialista italiano e il Governo, (13 febbraio 1801-4 marzo 1905)*, e ne parla.

Il Socio Volterra offre il 3° volume del *Trattato di Meccanica razionale*, del prof. Caldarera.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'Accademia delle scienze di Nuova York; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società zoologica di Tokyo; la Società Reale di Vittoria; la Società geografica del Cairo; il Museo coloniale di Wellington; il Museo di storia naturale di Nuova York; il Museo di Cape Town; l'Università di Glasgow; gli Osservatorii di Vienna e di Cambridge Mass.

V. C